CY TECH	**Cycle préparatoire 1ère année** **Devoir surveillé 3** *K. Fayad, K. Guezguez, J.-M. Masereel, R. Nuadi*	
	Matière : **Algèbre**	*Date* : **Lundi 20 janvier 2020**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **3 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte six exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

⋄ ⋄ ⋄

Exercice 1. [3 points]
Linéariser

1. $\cos^5(x)$
2. $\sin^2(x)\cos^3(x)$

Exercice 2. [7 points]
Dans chacun des cas suivants, factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $P(X) = X^4 + X^2 + 1$
2. $P(X) = X^{2n} + 1, n \in \mathbb{N}^*$
3. $P(X) = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$ (Vous pouvez vérifier que i est une racine de P)

Exercice 3. [7 points]

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $A = X^{2020} - X^3 + X$ par $B = X^2 + 1$.
2. Soit $P = X^{2n} + X^n + 1 \in \mathbb{C}[X], \quad n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que
   $$(X^2 + X + 1 \text{ divise } P) \Longleftrightarrow (j^n \text{ est une racine de } X^2 + X + 1)$$
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur n pour que P soit divisible par $X^2 + X + 1$.
3. Soient a, b deux réels et le polynôme $P = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.
   (a) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 2$.
   (b) Déduire la valeur de a et de b pour que $X^2 + 2$ divise P.

Exercice 4. [4 points]

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$(z+i)^n = (z-i)^n, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$
2. Soit $P = (X+i)^n - (X-i)^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Vérifier que le degré de P est égal à $n-1$.
   (b) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 5. [5 points]
Soit a, b, c, d quatre nombres complexes avec $a \neq 0$. On note z_1, z_2, z_3 les trois racines (distinctes ou non) du polynôme
$$P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

1. En utilisant z_1, z_2, z_3, factoriser P.
2. En identifiant les deux expressions de P, calculer en fonction de a, b, c, d, les expressions
$$z_1 + z_2 + z_3, \qquad z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3, \qquad z_1z_2z_3$$
3. (a) Exprimer en fonction de a, b, c, d, l'expression
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$$
   (b) Déduire, en fonction de a, b, c, d, l'expression de
$$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$$
   (Indication : Vous pouvez commencer par $P(z_1) + P(z_2) + P(z_3)$).
4. (a) Montrer que :
$$(0 \text{ est une racine de } P) \Longleftrightarrow d = 0.$$
   (b) Dans le cas où zéro n'est pas une racine de P, calculer (toujours en fonction de a, b, c, d) l'expression
$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}.$$

Exercice 6. [4 points]

1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction
$$F(X) = \frac{X^{11}}{(X-1)^3(X^2+1)^2(X^2+X+1)^2}$$
2. Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ en éléments simples la fraction rationnelle
$$F(X) = \frac{X^4+1}{X(X-1)^2}$$