Correction du DS3
Algèbre (Janvier 2020)

Exercice 1

1/ $$\cos^5 x = \frac{1}{2^5}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^5$$
$$= \frac{1}{2^5}\left(e^{5ix}+5e^{3ix}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{-3ix}+e^{-5ix}\right)$$
$$= \frac{1}{2^5}\left(e^{5ix}+e^{-5ix}+5\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)+10\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2^4}\left(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x\right)$$

2/ $$\sin^2 x\cos^3 x = \frac{1}{(2i)^2}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2\frac{1}{2^3}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3$$
$$= \frac{1}{-2^5}\left[\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right]^2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$$
$$= -\frac{1}{2^5}\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)^2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$$
$$= -\frac{1}{2^5}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}-2\right)\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$$
$$= -\frac{1}{2^5}\left(e^{5ix}+e^{-5ix}+e^{3ix}+e^{-3ix}-2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{16}\left(\cos 5x+\cos 3x-2\cos x\right)$$

Exercice 2

1/ $$P(X) = X^4+X^2+1 = X^4-2X^2+1-X^2$$
$$= (X^2+1)^2 - X^2$$
$$= (X^2+X+1)(X^2-X+1) \leftarrow \text{Factorisation dans } \mathbb{R}[X].$$

Dans $\mathbb{C}[X]$. Déterminons les racines de P.

a/ $z^2+z+1=0 \iff z=j$ ou $z=+\bar{j}=j^2$

b/ $z^2 - z + 1 = 0 \iff z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

donc P s'écrit dans $\mathbb{C}[X]$ comme produit de facteurs irréductible de la façon suivante :

$$P(X) = (X - j)(X - j^2)\left(X - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(X - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

2/ $P(X) = X^{2n} + 1$, $\quad n \in \mathbb{N}^*$

a) Résolution de l'équation $z^{2n} + 1 = 0$

on pose $z = re^{i\theta}$ l'écriture exponentielle de z.

$$z^{2n} + 1 = 0 \iff r^{2n} e^{2in\theta} = e^{i\pi}$$

$$\iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{2n} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ w_k = e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{2n}\right)}, \ k \in [\![0, 2n-1]\!] \right\}.$$

Dans $\mathbb{C}[X]$.

$$P(X) = \prod_{k=0}^{2n-1} (X - w_k)$$

Dans $\mathbb{R}[X]$, on remarque que:

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad w_{2n-1-k} = \overline{w_k}$$

donc
$$P(X) = \prod_{k=0}^{n-1} (X - w_k)(X - \overline{w_k})$$
$$= \prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2\,\mathrm{Re}(w_k)X + |w_k|^2)$$
$$= \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{2n}\right)X + 1\right)$$

3/ $P(X) = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6.$

$P(i) = 1 + 5i - 7 - 5i + 6$
$= 0$

$P'(X) = 4X^3 - 15X^2 + 14X - 5$

$P'(i) = -4i - 15 + 14i - 5 \neq 0$

i est une racine simple de P, or $P \in \mathbb{R}[X]$ donc $-i$ $(= \bar{i})$ est aussi racine simple de P

d'où $X^2 + 1 \,/\, P$.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6 & X^2 + 1 \\
\hline
- & X^4 + X^2 & X^2 - 5X + 6 \\
\hline
 & -5X^3 + 6X^2 - 5X + 6 & \\
- & -5X^3 - 5X & \\
\hline
 & 6X^2 + 6 & \\
- & 6X^2 + 6 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$P = (X^2 - 5X + 6)(X^2 + 1)$

déterminons les racines de $Q = X^2 - 5X + 6$

on a: $x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x = 2$ ou $x = 3$.

On a alors $Q = (X-2)(X-3)$.

D'où dans $\mathbb{C}[X]$: $P(X) = (X - i)(X + i)(X - 2)(X - 3)$

dans $\mathbb{R}[X]$ $P(X) = (X^2 + 1)(X - 2)(X - 3)$.

Exercice 3

1/ $d°B = 2$ donc $d°R \leq 1$

Soit $R(X) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$A = B.Q + R$ avec Q est le quotient de la division euclidienne de A par B.

$$\begin{cases} A(i) = B(i)\,Q(i) + R(i) \\ A(-i) = B(-i)\,Q(-i) + R(-i) \end{cases}$$

or les racines de B sont i et $-i$

donc $B(i) = B(-i) = 0$, par suite

$$\begin{cases} A(i) = R(i) \\ A(-i) = R(-i) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ai + b = i^{2020} - i^3 + i \\ -ai + b = (-i)^{2020} - (-i)^3 - i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ai + b = 1 + 2i \\ -ai + b = 1 - 2i \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 2 \text{ et } b = 1.$$

2/ (a)

" $\Rightarrow$ "

$X^2 + X + 1 \,/\, P \Rightarrow j$ est une racine de P

$\Rightarrow j^{2n} + j^n + 1 = 0.$

$\Rightarrow j^n$ est une racine de $X^2 + X + 1$

" $\Leftarrow$ " j^n est une racine de $X^2 + X + 1 \Rightarrow j^{2n} + j^n + 1 = 0$

$\Rightarrow j$ est une racine de P

$\Rightarrow \bar{j}$ est aussi une racine de P

$\Rightarrow (X^2 + X + 1) \,/\, P.$

b) d'après a)

P est divisible par $X^2 + X + 1 \Longleftrightarrow j^n$ est une racine de $X^2 + X + 1$

$\iff j^n = j$ ou $j^n = j^2$

$\iff n = 3k+1$, ou $n = 3k+2$

$k \in \mathbb{Z}$

$\iff n \equiv 1 [3]$ ou $n \equiv 2 [3]$

3/ a/

$$\begin{array}{r|l} X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2 & X^2 + 2 \\ \hline - X^4 \quad\quad + 2X^2 \quad\quad\quad\quad & X^2 + X + (a-2) \\ \hline X^3 + (a-2)X^2 + bX + 2 & \\ - X^3 \quad\quad\quad\quad + 2X \quad\quad & \\ \hline (a-2)X^2 + (b-2)X + 2 & \\ - (a-2)X^2 \quad\quad\quad + 2a-4 & \\ \hline (b-2)X + 6 - 2a. & \end{array}$$

$Q = X^2 + X + (a-2)$

$R = (b-2)X + 6 - 2a.$

b/ $X^2 + 2 \mid P \iff R = 0$

$\iff b = 2$ et $a = 3$.

Exercice 4

1/ $(E) : (z+i)^n = (z-i)^n \qquad n \in \mathbb{N}^*$

- i et $-i$ ne sont pas des solutions de (E)

$(E) : (z+i)^n = (z-i)^n \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$

on pose $Z = \frac{z+i}{z-i}$ $\left(z = \frac{i(Z+1)}{Z-1} \quad Z \neq 1 \right)$

$(E) \iff \begin{cases} Z^n = 1 \\ z = \frac{i(Z+1)}{Z-1} \text{ et } Z \neq 1. \end{cases}$

Les solutions de l'equation $Z^n = 1$

sont $Z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$

or $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$

on remarque que l'equation $\dfrac{z+i}{z-i} = 1 = Z_0$

n'admet pas de solution, car sinon

$z - i = z + i \iff -i = i$ absurde.

donc les solutions de (E) sont

$$z_k = \frac{i(Z_k + 1)}{Z_k - 1} \quad , \quad k \in [\![1, n-1]\!]$$

2/ a/ $P(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(i^{n-k} - (-i)^{n-k}\right) X^k$

on pose $a_k = C_n^k \left(i^{n-k} - (-i)^{n-k}\right)$

pour k varie de 0 à n.

$a_n = C_n^n \left(i^0 - (-i)^0\right) = 0.$

donc $d^\circ P \leqslant n - 1.$

$$a_{n-1} = C_n^{n-1} \left(i^{n-(n-1)} - (-i)^{n-(n-1)}\right)$$

$$= n\left(i - (-i)\right)$$

$$= 2in \neq 0.$$

d'où $d^\circ P = n - 1.$

b) Les racines de P sont les solutions de $(z+i)^n = (z-i)^n$.

d'après 1) on a :

$$P(X) = 2in \prod_{k=1}^{n-1} (X - z_k)$$

avec $z_k = \dfrac{i(e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1)}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}$ $\quad k \in [[1, n-1]]$

Exercice 5

1/ $P = a(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$

2/ $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$. (1)

$$P(z) = a\left[z^3 - (z_1+z_2+z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z + (-z_1z_2z_3)\right] \quad (2)$$

En identifiant (1) et (2) on obtient :

$z_1 + z_2 + z_3 = \dfrac{-b}{a}$ $\qquad z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \dfrac{c}{a}$

et $z_1z_2z_3 = -\dfrac{d}{a}$.

3) (a) on a : $(z_1+z_2+z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$

d'après 2) on a : $\dfrac{b^2}{a^2} = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2\dfrac{c}{a}$

donc : $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}$

b) $P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) = 0$

$\Leftrightarrow a(z_1^3 + z_2^3 + z_3^3) + b(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$

$+ c(z_1 + z_2 + z_3) + 3d = 0$

$\Leftrightarrow z_1^3 + z_2^3 + z_3^2 = \dfrac{1}{a}\left[-b \cdot \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2} + c\dfrac{b}{a} - 3d\right]$

$= \dfrac{-b^3 + 3abc - 3a^2d}{a^3}$

3/ (a) 0 est une racine de $P \Leftrightarrow P(0) = 0$

$\Leftrightarrow d = 0$

(b) supposons que 0 n'est pas une racine de P, donc $d \neq 0$.

$\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} = \dfrac{z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2}{z_1 \cdot z_2 z_3}$

$= \dfrac{c/a}{-\frac{d}{a}} = -\dfrac{c}{d}$

Exercice 6

1/a) dans $\mathbb{R}(X)$

$$F(X) = E + \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{a_3}{(X-1)^3} + \frac{\alpha_1 X + \beta_1}{X^2+1}$$

$$+ \frac{\alpha_2 X + \beta_2}{(X^2+1)^2} + \frac{\lambda_1 X + \gamma_1}{X^2+X+1} + \frac{\lambda_2 X + \gamma_2}{(X^2+X+1)^2}.$$

b) dans $\mathbb{C}(X)$.

$$F(X) = E + \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{a_3}{(X-1)^3}$$

$$+ \frac{b_1}{X-i} + \frac{b_2}{(X-i)^2} + \frac{\overline{b_1}}{X+i} + \frac{\overline{b_2}}{(X+i)^2}$$

$$+ \frac{c_1}{X-j} + \frac{c_2}{(X-j)^2} + \frac{\overline{c_1}}{X-\overline{j}} + \frac{\overline{c_2}}{(X-\overline{j})^2}$$

avec

E est le quotient de la division euclidienne de X^{11} par $(X-1)^3(X^2+1)^2(X^2+X+1)^2$

$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \lambda_1, \gamma_1, \lambda_2, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.

$b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

2) $F(X) = \dfrac{X^4+1}{X(X-1)^2}$

La fraction F est irréductible.

$d°F = 4 - 3 = 1 \geq 0 \Rightarrow E \neq 0$

0 est un pôle simple de F

1 est un pôle double de F.

$$F(X) = E + \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}$$

avec $E \in \mathbb{R}[X]$: le quotient de la division euclidienne de X^4+1 par $X^3 - 2X^2 + X$.

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l|l} X^4 \qquad\quad +1 & X^3 - 2X^2 + X \\ \hline -\; X^4 - 2X^3 + X^2 & X + 2 \\ \hline 2X^3 - X^2 + 1 & \\ 2X^3 - 4X^2 + 2X & \\ \hline 3X^2 - 2X + 1. & \end{array}$$

$\boxed{E = X + 2}$

$a = XF(X)\Big|_{X=0} = 1.$

$c = (X-1)^2 F(X)\Big|_{X=1} = 2$

$$F(-1) = \frac{2}{(-1)(-2)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$F(-1) = -1 + 2 + \frac{a}{-1} + \frac{b}{-2} + \frac{c}{4}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2} = 1 + (-1) - \frac{b}{2} + \frac{2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad b = 2.$$

$$F(X) = (X+2) + \frac{1}{X} + \frac{2}{(X-1)} + \frac{2}{(X-1)^2}$$