CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 2** **Algèbre II** **Double Diplôme**
	L'usage de tout appareil électronique est interdit
	Date: **Mardi 11 Avril 2023** *Durée:* **1h30** *Nombre de pages:* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1 (*4 points*)
On considère la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définis par
$u_1 = (1,-2,3,-1), u_2 = (2,-1,1,2), u_3 = (-4,-1,3,-8), u_4 = (-5,-2,5,-11), u_5 = (-3,0,1,-5)$
On pose $F = vect(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$

1. Démontrer que u_1, u_3 et u_5 sont liés.
2. Démontrer que u_1, u_2 est une base de F.

Exercice 2 (*6 points*)
On considère les deux ensembles:

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + z + t = 0\right\}$$

et

$$G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y - z + t = 0 \text{ et } y - z = 0\right\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.
3. L'ensemble $F \cap G$ est-il un espace vectoriel? Si oui, déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice 3 (*6 points*)

1. On considère $\mathbb{R}^2$, on définit l'addition par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2, (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$$

   On admettra que $E = (\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe.

   (a) On munit $\mathbb{R}^2$ d'une loi externe ".":
   $\begin{cases} \mathbb{R} \times E \to E \\ (\lambda, (x,y)) \mapsto \lambda.(x,y) \end{cases}$
   Enoncer les 4 propriétés que doit vérifier la loi externe pour montrer que $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est un espace vectoriel.

   (b) Si la loi externe est définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \lambda.(x,y) = (\lambda x, y)$, montrer que $(\mathbb{R}^2, +, .)$ n'est pas un espace vectoriel.

2. Montrer que l'ensemble des fonctions de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ est vérifiant $f(1) = 2f(0)$ est un espace-vectoriel.

Exercice 4 (*6 points*)
Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels

$$F = \text{vect}\,(u_1 = (1,1,0); u_2 = (0,1,-2))$$

et

$$G = \text{vect}\,(u_3 = (2,1,2); u_4 = (1,0,2))$$

On rappelle que la famille des vecteurs $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (nommée base canonique).

1. (a) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une famille liée et exprimer u_3 comme combinaison linéaire de u_1 et u_2.

   (b) Montrer que $F = G$.

2. Compléter (u_1, u_2) en une base de $\mathbb{R}^3$.