DS2 Algèbre 2 V2 2022-2023

Sujet : [DS2 2022 2023 V2 DS-Algebre2 PREING1 S2 | Δhmed CyCours (cy-deltahmed.fr)]

Correction proposée par Mathis S.

Exercice 1 :

Dans cet exercice, on considère que $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

1.

Pour montrer que u_1, u_3 et u_5 sont liés, on cherche une solution non nulle de $xu_1 + yu_3 + zu_5 = 0$

On peut le montrer en vérifiant que le rang de la matrice associée est strictement inférieur à 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & -8 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & -9 & -6 \\ 0 & 15 & 10 \\ 0 & -12 & -8 \end{bmatrix} L_2 = L_2 + 2L_1, L_3 = L_3 - 3L_1, L_4 = L_4 + L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} L_2 = \frac{L_2}{-3}, L_3 = \frac{L_3}{5}, L_4 = \frac{L_4}{-4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_3 = L_3 - L_2, L_4 = L_4 - L_2$$

Le rang de la matrice associée est $2 < 3$.

Il existe une solution non nulle de l'équation $xu_1 + yu_3 + zu_5 = 0$

Les vecteurs u_1, u_3, u_5 sont donc liés.

2.

u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc la famille (u_1, u_2) est libre.

Montrons que cette famille engendre F. Il suffit de vérifier que $u_3, u_4, u_5 \in Vect(u_1, u_2)$

Vérifions donc, par la même méthode que la question précédente, que (u_1, u_2, u_3) et (u_1, u_2, u_4) sont des familles liées.

Pour u3 :

Ecrivons la matrice associée à l'équation $xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -5 & 15 \\ 0 & 4 & -12 \end{bmatrix} L_2 = L_2 + 2L_1, L_3 = L_3 - 3L_1, L_4 = L_4 + L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} L_2 = \frac{L_2}{3}, L_3 = \frac{L_3}{-5}, L_4 = \frac{L_4}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_3 = L_3 - L_2, L_4 = L_4 - L_2$$

Pour l'équation $xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0$, le rang de la matrice associée est < 3 donc il existe une solution non nulle. La famille (u_1, u_2, u_3) est liée, $u_3 \in Vect(u_1, u_2)$

Pour u4 :

Ecrivons la matrice associée à l'équation $xu_1 + yu_2 + zu_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & -5 & 20 \\ 0 & 4 & -16 \end{bmatrix} L_2 = L_2 + 2L_1, L_3 = L_3 - 3L_1, L_4 = L_4 + L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} L_2 = \frac{L_2}{3}, L_3 = \frac{L_3}{-5}, L_4 = \frac{L_4}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_3 = L_3 - L_2, L_4 = L_4 - L_2$$

De même, le rang de la matrice associée est < 3, donc $u_4 \in Vect(u_1, u_2)$

Aussi, $u_5 \in Vect(u_1, u_3)$ et $u_3 \in Vect(u_1, u_2)$ donc $u_5 \in Vect(u_1, u_2)$

Ainsi, $u_3, u_4, u_5 \in Vect(u_1, u_2)$ donc (u_1, u_2) engendre F.

Ainsi, (u_1, u_2) est une base de F.

Exercice 2 :

1.

$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + z + t = 0\}$

$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, t = -x - 2y - z\}$

$F = \{(x, y, z, -x - 2y - z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$

$F = \{(x, 0,0, -x) + (0, y, 0, -2y) + (0,0, z, -z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$

$F = \{x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,-2) + z(0,0,1,-1), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$

On pose $u_1 = (1,0,0,-1)$, $u_2 = (0,1,0,-2)$, $u_3 = (0,0,1,-1)$

Alors $F = Vect(u_1, u_2, u_3)$

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, la famille (u_1, u_2, u_3) engendre F.

Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. Si on considère l'équation $xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0$, alors

$$\left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \end{array}\right\}$$

L'équation admet comme unique solution $(0,0,0)$ donc la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

(u_1, u_2, u_3) est donc une base de F.

2.

$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y - z + t = 0 \text{ et } y - z = 0\}$

$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, t = -x - 2y + z \text{ et } y = z\}$

$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, t = -x - y \text{ et } y = z\}$

$G = \{(x, y, y, -x - y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$G = \{(x, 0,0, -x) + (0, y, y, -y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$G = \{x(1,0,0,-1) + y(0,1,1,-1), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

On pose $v_1 = (1,0,0,-1)$ et $v_2 = (0,1,1,-1)$

Alors $G = Vect(v_1, v_2)$

G est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, la famille (v_1, v_2) engendre G. De plus, les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.

Ainsi, (v_1, v_2) est une base de G.

3.

$F \cap G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y - z + t = 0 \text{ et } y - z = 0\}$

Soit $w(x, y, z, t) \in F \cap G$

Alors w vérifie le système :

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2y + z + t = 0 \\ x + 2y - z + t = 0 \\ y = z \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2y + z + t = 0 \\ -2z = 0 \\ y = z \end{array}\right\} E_2 = E_2 - E_1$$

$$\begin{cases} t = -x \\ y = z = 0 \end{cases}$$

$F \cap G = \{(x, 0, 0, -x), x \in \mathbb{R}\}$

$F \cap G = \{x(1, 0, 0, -1), x \in \mathbb{R}\}$

$F \cap G = Vect\big((1, 0, 0, -1)\big)$

$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Une base de $F \cap G$ est $\{(1, 0, 0, -1)\}$.

Exercice 3 :

1.a.

Pour montrer que $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est un espace vectoriel, la loi externe doit vérifier les propriétés suivantes, $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$:

- $1.(x, y) = (x, y)$
- $\lambda.\big(\mu.(x, y)\big) = (\lambda\mu).(x, y)$
- $\lambda.(x + x', y + y') = \lambda.(x, y) + \lambda.(x', y')$
- $(\lambda + \mu).(x, y) = \lambda.(x, y) + \mu.(x, y)$

1.b.

Montrons que la loi externe ne vérifie par le quatrième point. $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$(\lambda + \mu).(x, y) = \big((\lambda + \mu)x, y\big)$

$\lambda.(x, y) + \mu.(x, y) = (\lambda x, y) + (\mu x, y) = \big((\lambda + \mu)x, 2y\big)$

Pour $y \neq 0$, $(\lambda + \mu).(x, y) \neq \lambda.(x, y) + \mu.(x, y)$

$(\mathbb{R}^2, +, .)$ n'est pas un espace vectoriel.

2.

Rappel : L'ensemble des applications de E vers F est noté $\mathcal{F}(E, F)$. D'après le cours, pour tout ensemble A, $\mathcal{F}([0; 1], \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Soit F l'ensemble des fonctions de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(1) = 2f(0)$

$F = \{f \in \mathcal{F}([0; 1], f(1) = 2f(0)\}$

Pour montrer que F est un espace vectoriel, montrons que c'est un sous espace-vectoriel de l'espace vectoriel de référence $\mathcal{F}([0; 1], \mathbb{R})$

Nous devons vérifier 3 conditions : $F \subset \mathcal{F}([0; 1], \mathbb{R})$, l'application nulle est incluse dans F et

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g \in F, \lambda f + \mu g \in F$

- F est incluse dans $\mathcal{F}([0; 1], \mathbb{R})$ par définition
- Si f est la fonction nulle, alors $f(1) = 2f(0) = 0$ donc $f \in F$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g \in F$,
  $(\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = 2\lambda f(0) + 2\mu g(0) = 2\big(\lambda f(0) + \mu g(0)\big)$
  $= 2(\lambda f + \mu g)(0)$
  Donc $\lambda f + \mu g \in F$

F est bien un sous espace-vectoriel de $\mathcal{F}([0;1],\mathbb{R})$. F est donc un espace vectoriel.

Exercice 4 :

1.a.

On remarque aisément que $u_3 = 2u_1 - u_2$

(Si on ne le voit pas on peut toujours résoudre un système simple).

1.b.

De même, on remarque que $u_4 = u_1 - u_2$

Ainsi, $u_1 = u_3 - u_4$ et $u_2 = u_3 - 2u_4$

On a $u_3, u_4 \in Vect(u_1, u_2)$ donc $Vect(u_3, u_4) \subset Vect(u_1, u_2)$ donc $G \subset F$

On a $u_1, u_2 \in Vect(u_3, u_4)$ donc $Vect(u_1, u_2) \subset Vect(u_3, u_4)$ donc $F \subset G$

Donc $F = G$

2.

On considère la famille (e_1, u_1, u_2). Cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si le rang de la matrice homogène associée à (e_1, u_1, u_2) est 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Il apparaît immédiatement que le rang de cette matrice est 3. Ainsi, (e_1, u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^3$.