Cycle Pré-ingenieur
Première Année
Agèbre I - 2022/2023
D. Mohamed Ali

Correction DS2 Algèbre

Exercice 1 (5 pts)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ainsi que deux sous-espaces vectoriels $F \subseteq E$ et $G \subseteq E$.
Soit γ une famille de vecteurs de E.

1. Rappeler la définition d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (1 pt).
2. Rappeler la définition du sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs γ (1 pt).
3. Rappeler la définition de la somme $F + G$ (1 pt).
4. Montrer que $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$ (2 pts).

Correction

Toutes les réponses se trouvent dans votre cours

Exercice 2 (6 pts)

Considérons la famille de vecteurs $\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ de $\mathbb{R}^5$ telle que $v_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 2, 1, 2)$, $v_3 = (1, 0, 1, 1, 0)$, $v_4 = (0, 1, 0, 0, 1)$ et $v_5 = (1, 0, 1, 0, 1)$.

1. La famille β est-elle liée ? Dans le cas positif, fournir les relations de dépendance linéaire (2 pts).
2. Déterminer une base Ω pour le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\beta)$. Vous préciserez la dimension de $\text{Vect}(\beta)$ (2 pts).
3. Considérons la famille $\gamma = \{e_4, e_5\}$, avec $e_4 = (0, 0, 1, 0, 0)$ et $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$. Montrer que la famille $\gamma \cup \Omega$ forme une base pour $\mathbb{R}^5$ (2 pts).

Correction

1. Pour vérifier si la famille β est liée, on cherche à savoir s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$, pas tous nuls, tels que :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5 = 0$$

où 0 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^5$. En d'autres termes, on cherche à savoir s'il existe une solution non triviale du système linéaire homogène suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système, on peut appliquer la méthode de pivot de Gauss qui permet d'obtenir sa forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice est 3, donc la dimension de l'espace vectoriel engendré par β est inférieure à 5. Comme β contient 5 vecteurs, la famille β est liée

$$(-\lambda_4 + \lambda_5)v_1 - (\lambda_4 + 2\lambda_5)v_2 + 3\lambda_4 v_3 + 3\lambda_4 v_4 + 3\lambda_5 v_5 = 0$$

2. Pour déterminer une base Ω pour le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\beta)$, on peut voir que d'après la question précédente, la matrice des coefficients indique que les trois premiers vecteurs de β sont linéairement indépendants. Par conséquent, on peut prendre $\Omega = \{v_1, v_2, v_3\}$ comme base de $\text{Vect}(\beta)$. La dimension de $\text{Vect}(\beta)$ est donc 3.
3. Pour montrer que $\gamma \cup \Omega$ forme une base pour $\mathbb{R}^5$, on doit montrer qu'elle est libre et qu'elle engendre tout $\mathbb{R}^5$. Comme Ω est une base pour $\text{Vect}(\beta)$, tout vecteur $w \in \text{Vect}(\beta)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de v_1, v_2, et v_3 :

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

De même, tout vecteur de $\mathbb{R}^5$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de e_4 et e_5 :

$$u = b_1 e_4 + b_2 e_5$$

Alors, tout vecteur de $\mathbb{R}^5$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\gamma \cup \Omega$:

$$u + w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + b_1 e_4 + b_2 e_5$$

Par conséquent, $\gamma \cup \Omega$ engendre tout $\mathbb{R}^5$.
Montrons maintenant que $\gamma \cup \Omega$ est libre. Supposons qu'il existe des coefficients λ_1, λ_2, λ_3, b_1, et b_2 tels que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + b_1 e_4 + b_2 e_5 = 0$$

En écrivant les coordonnées de chaque vecteur et en résolvant ce système, on trouve que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = b_1 = b_2 = 0$. Par conséquent, $\gamma \cup \Omega$ est une famille libre de 5 vecteurs dans un espace de dimension 5, donc c'est une base pour $\mathbb{R}^5$.

Exercice 3 (7 pts)

Soient $E \subseteq \mathbb{R}^3$ et $F \subseteq \mathbb{R}^3$ deux parties de $\mathbb{R}^3$ telles que : $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y-z=0$ et $x-y-z=0\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y-2z=0\}$ ainsi que les vecteurs $u=(1,0,1)$, $v=(1,1,1)$ et $w=(0,2,1)$.

1. Montrer que les parties E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (2 pts).
2. Déterminer une base du sous-espace vectoriel E. Vous préciserez la dimension de E (1 pt).
3. Montrer que la famille $\{v,w\}$ est une base de F. Vous préciserez la dimension de F (1 pt).
4. Montrer que la famille $\beta = \{u,v,w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (1 pt).
5. Montrer que $E \cap F = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$ (1 pt).
6. Soit $\sigma = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, alors exprimer σ dans la base β (1 pt).

Correction

1. Pour montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, il faut vérifier que :
   — $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \in E$;
   — si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$, alors $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in E$;
   — si $\mathbf{u} \in E$ et $k \in \mathbb{R}$, alors $k\mathbf{u} \in E$.
   On vérifie facilement que $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \in E$, car $0+0-0=0$ et $0-0-0=0$.
   Soient $\mathbf{u}=(x_1,y_1,z_1)$ et $\mathbf{v}=(x_2,y_2,z_2)$ deux vecteurs de E. Alors on a $x_1+y_1-z_1=0$, $x_1-y_1-z_1=0$ et $x_2+y_2-z_2=0$, $x_2-y_2-z_2=0$. En additionnant ces équations, on obtient $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2)=0$ et $(x_1+x_2)-(y_1+y_2)-(z_1+z_2)=0$, ce qui montre que $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in E$.
   Soit maintenant $\mathbf{u}=(x,y,z) \in E$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors on a $x+y-z=0$ et $x-y-z=0$. En multipliant les deux équations par k, on obtient $kx+ky-kz=0$ et $kx-ky-kz=0$, donc $k\mathbf{u} \in E$.
   On peut procéder de la même façon pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   Deuxième méthode :
   On a $E = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u} = (x,y,z)$ avec $x+y-z=0$ et $x-y-z=0\}$. En résolvant ce système d'équations, on trouve $x=z$ et $y=0$, donc $E = \{\lambda(1,0,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, $E = \text{Vect}\{(1,0,1)\}$ ce qui implique que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De la même manière, on a $F = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u} = (x,y,z)$ avec $x+y-2z=0\}$. On peut réécrire cette équation sous la forme $z = \frac{1}{2}(x+y)$, ce qui montre que tout vecteur de F peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $(1,0,\frac{1}{2})$ et $(0,1,\frac{1}{2})$. Par conséquent $F = \text{Vect}\{(1,0,\frac{1}{2}),(0,1,\frac{1}{2})\}$ ce qui implique que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. On a montré dans la question précedente que $E = \text{Vect}\{(1,0,1)\}$, alors $\{(1,0,1)\}$ est une base de E, et $\dim E = 1$.
3. On peut remarquer que $w = 2(0,1,\frac{1}{2})$, que $v = (1,0,\frac{1}{2}) + (0,1,\frac{1}{2})$. De plus v et w sont linéairement indépendants (ne sont pas colinéaires), donc $\{v,w\}$ est une base de F, et $\dim F = 2$.
4. La famille $\beta = u,v,w$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si β est une famille libre et engendre $\mathbb{R}^3$. On peut vérifier facilement que β est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, donc c'est une base pour $\mathbb{R}^3$.

5. Supposons qu'il existe un vecteur non nul $\mathbf{u} \in E \cap F$. Alors $\mathbf{u} \in E$, donc $\mathbf{u}$ est de la forme $\mathbf{u} = \lambda(1,0,1)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. D'autre part, $\mathbf{u} \in F$, donc $\mathbf{u}$ est de la forme $\mathbf{u} = (x,y,z)$ avec $x+y-2z=0$. En combinant ces deux expressions pour $\mathbf{u}$, on obtient $\lambda(1,0,1) = (x,y,z)$ avec $x+y-2z=0$, ce qui implique $\lambda + 0 - 2\lambda = 0$, donc $\lambda = 0$ et $u = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi, $E \cap F = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$, où $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$.
6. Soit $\mathbf{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a montré dans la question 4 que $\beta = \{u,v,w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, donc il existe des scalaires $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{u} = au + bv + cw$. En utilisant les coordonnées des vecteurs u, v et w dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on peut exprimer $\mathbf{u}$ sous la forme $(x,y,z) = a(1,0,1) + b(1,1,1) + c(0,2,1)$, avec

$$\begin{cases} a = -x - y + 2z \\ b = 2x + y - 2z \\ c = -x - y + 2z \end{cases} .$$

Exercice 4 (5 pts)

Soit le système linéaire suivant : (S) : $\begin{cases} x + 2y + 2z + 5t = 0 \\ -x - y + z + 2t = 0 \\ 2x + 3y + z + 3t = 0 \\ y + 3z + 7t = 0 \end{cases}$

1. Résoudre le système linéaire (S) et déterminer son rang (3 pts).
2. Soit E l'ensemble des solutions de ce système. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (1 pt).
3. Déterminer une base du sous-espace vectoriel E. Préciser la dimension de E (1 pt).

Correction

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on peut réduire la matrice augmentée du système (S) :
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Le système linéaire réduit nous donne deux équations indépendantes :
$\begin{cases} x + 2y + 2z + 5t = 0 \\ y + 3z + 7t = 0 \end{cases}$
On peut écrire la solution générale de (S) sous la forme :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4z + 9t \\ -3z - 7t \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

On a donc une infinité de solutions $(x, y, z, t) = (4z + 9t, -3z - 7t, z, t)$, ce qui montre que le système (S) admet une solution pour tout choix des scalaires z et t. Le rang de la matrice augmentée est donc 2 (il y a deux pivots).

2. Soit E l'ensemble des solutions du système (S). Tout vecteur $u = (x, y, z, t)$ de E peut être exprimé sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4z + 9t \\ -3z - 9t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $E = \text{Vect}\{(4, -3, 1, 0), (9, -7, 0, 1)\}$. On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2.

Autre méthode :

Pour montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, il faut montrer que E contient le vecteur nul, que E est stable par addition et par multiplication par un scalaire.

Le vecteur nul est solution du système (S), donc appartient à E. Soient (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) deux solutions de (S) et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$ est solution de (S), car :

— $(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)+2(z_1+z_2)+5(t_1+t_2) = (x_1+2y_1+2z_1+5t_1)+(x_2+2y_2+2z_2+5t_2) = 0 + 0 = 0$,

— $(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) + 7(t_1 + t_2) = (y_1 + 3z_1 + 7t_1) + (y_2 + 3z_2 + 7t_2) = 0 + 0 = 0$.

Ainsi, E est stable par addition. De plus, pour tout $(x, y, z, t) \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda(x, y, z, t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$, qui est solution de (S) car :

— $\lambda x + 2\lambda y + 2\lambda z + 5\lambda t = \lambda(x + 2y + 2z + 5t) = \lambda \times 0 = 0$,

— $\lambda y + 3\lambda z + 7\lambda t = \lambda(y + 3z + 7t) = \lambda \times 0 = 0$.

Ainsi, E est stable par multiplication par un scalaire. Donc, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

3. On a démontré dans la question 2 que la famille de vecteurs $\{(4, -3, 1, 0), (9, -7, 0, 1)\}$ engendre E. De plus, comme ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, ils forment une base du sous-espace vectoriel E. Ainsi, la base de E est donnée par :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La dimension de E est donc 2.