CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 2** **Analyse I**	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* 12/12/2023 *Durée :* **1h00** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

⋄ ⋄ ⋄

Exercice 1 (6 points) : Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes. Sinon, justifier pourquoi il n'y a pas de limite.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n^4+3n^2} - \sqrt{n^4+n-1}$.

   Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^4+3n^2} - \sqrt{n^4+n-1} &= \sqrt{n^4+3n^2} - \sqrt{n^4+n-1} \cdot \frac{\sqrt{n^4+3n^2}+\sqrt{n^4+n-1}}{\sqrt{n^4+3n^2}+\sqrt{n^4+n-1}} \\
&= \frac{n^4+3n^2-n^4-n+1}{\sqrt{n^4+3n^2}+\sqrt{n^4+n-1}} \\
&= \frac{3n^2-n+1}{n^2\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}} \\
&= \frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}}
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}} = \frac{3}{2}.$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{E(\ln(n))}{n}$.

   Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\ln(n)-1 \leq E(\ln(n)) \leq \ln(n) \implies \frac{\ln(n)-1}{n} \leq \frac{E(\ln(n))}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, nous pouvons conclure

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)-1}{n} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{E(\ln(n))}{n} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(\ln(n))}{n} = 0.$$

3. $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \dfrac{(-1)^n n^2 + n^3}{1+3n^3} + i \cdot \dfrac{n^2+2n}{3n^2+2i}.$

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n n^2 + n^3}{1+3n^3} + i \cdot \frac{n^2+2n}{3n^2+2i} &= \frac{(-1)^n n^2 + n^3}{1+3n^3} + i \cdot \frac{n^2+2n}{3n^2+2i} \cdot \frac{3n^2-2i}{3n^2-2i} \\
&= \frac{(-1)^n n^2 + n^3}{1+3n^3} + i \cdot \frac{3n^4+6n^3-2in^2-4in}{9n^4+4} \\
&= \frac{(-1)^n n^2 + n^3}{1+3n^3} + \frac{2n^2+4n}{9n^4+4} + i \cdot \frac{3n^4+6n^3}{9n^4+4} \\
&= \frac{\frac{(-1)^n}{n}+1}{\frac{1}{n^3}+3} + \frac{\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{9+\frac{4}{n^4}} + i \cdot \frac{3+6\frac{1}{n}}{9+\frac{4}{n^4}}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{n}+1}{\frac{1}{n^3}+3} + \frac{\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{9+\frac{4}{n^4}} + i \cdot \frac{3+6\frac{1}{n}}{9+\frac{4}{n^4}} = \frac{1}{3} + i\frac{1}{3}.$$

Exercice 2 (4 points) : Montrer, en revenant à la définition de la limite, que :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$, pour $u_n = \dfrac{2n^3-3}{n^3+1}$.

   Solution : Soit $\epsilon > 0$, on cherche $N \in \mathbb{N}^*$, tel que

   $$\forall n \geq N, \quad |u_n - 2| < \epsilon.$$

   C'est-à-dire, on cherche $N \in \mathbb{N}$, tel que

   $$\begin{aligned}
   \forall n \geq N, \left|\frac{2n^3-3}{n^3+1} - 2\right| < \epsilon &\iff \forall n \geq N, \left|\frac{2n^3-3}{n^3+1} - \frac{2(n^3+1)}{n^3+1}\right| < \epsilon \\
   &\iff \forall n \geq N, \left|\frac{2n^3-3-2n^3-2}{n^3+1}\right| < \epsilon \\
   &\iff \forall n \geq N, \frac{5}{n^3+1} < \epsilon.
   \end{aligned}$$

Sachant que

$$\frac{5}{n^3+1} < \epsilon \iff \frac{5}{\epsilon} < n^3+1 \iff \frac{5}{\epsilon} - 1 < n^3 \iff \left(\frac{5}{\epsilon} - 1\right)^{\frac{1}{3}} < n,$$

il suffit de poser

$$N = E\left(\left(\frac{5}{\epsilon} - 1\right)^{\frac{1}{3}}\right) + 1.$$

Alors pour tout $n \geq N$, nous avons

$$n \geq N > \left(\frac{5}{\epsilon} - 1\right)^{\frac{1}{3}} \implies \left|\frac{2n^3-3}{n^3+1} - 2\right| < \epsilon.$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, pour $v_n = -2\ln(3n+1)$.

Solution : On doit vérifier

$$\forall m < 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad (n \geq N \implies v_n < M).$$

Soit $M > 0$, on cherche $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \geq N, \quad v_n < M.$$

C'est-à-dire, on cherche $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n > N$, nous avons

$$\begin{aligned} -2\ln(3n+1) < m &\iff \ln(3n+1) > -\frac{m}{2} \\ &\iff 3n+1 > e^{-\frac{m}{2}} \\ &\iff n > \frac{e^{-\frac{m}{2}} - 1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de poser

$$N = E\left(\frac{e^{-\frac{m}{2}} - 1}{3}\right) + 1,$$

pour conclure

$$n > N > \frac{e^{-\frac{m}{2}} - 1}{3} \implies -2\ln(3n+1) < m$$

Exercice 3 (4 points) : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{n^2}.$$

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Solution :

— Nous avons

$$a_{n+1}-a_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} = \frac{1}{(n+1)^3}>0.$$

Donc (a_n) est croissante.

— Nous avons

$$\begin{aligned} b_{n+1}-b_n = a_{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}-a_n-\frac{1}{n^2} &= \frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{n^2+(n+1)n^2-(n+1)^3}{(n+1)^3n^2} \\ &= \frac{n^3+2n^2-n^3-3n^2-3n-1}{(n+1)^3n^2} \\ &= \frac{-n^2-3n-1}{(n+1)^3n^2}<0. \end{aligned}$$

Donc (b_n) est décroissante.

— De plus

$$b_n-a_n = a_n+\frac{1}{n^2}-a_n = \frac{1}{n^2} \implies \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0.$$

Par conséquent, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2. En déduire la convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Qu'est-ce qu'on peut dire à propos de la valeur de leur limite ?

Solution : D'après les théoème sur les suites adjacentes les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 4 (6 points) : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence de la manière suivante :

$$u_0=6 \quad \text{et} \quad u_{n+1}=4-\frac{18}{2u_n+12}.$$

On se placera dans $I=[0,18]$. On pose

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 4-\frac{18}{2x+12}. \end{aligned}$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f.

Solution : Pour toute couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ avec $x<y$ nous avons

$$\begin{aligned} x<y \implies 2x+12<2y+12 \implies \frac{1}{2y+12}<\frac{1}{2x+12} &\implies -\frac{18}{2x+12}<-\frac{18}{2y+12} \\ &\implies 4-\frac{18}{2x+12}<4-\frac{18}{2y+12}. \end{aligned}$$

Ainsi f est strictement croissante.

2. Montrer que l'intervalle I est stable par f.

Solution : Puisque f est croissante, pour tout $x \in I$ nous avons

$$0 \le x \le 18 \quad \Longrightarrow \quad 0 \ < \ 4 - \frac{18}{12} \ = \ f(0) \ \le \ f(x) \ \le \ f(18) \ = \ 4 - \frac{18}{48} \ < \ 18.$$

3. Déterminer le(s) point(s) fixe(s) de f dans cet intervalle.

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad & \Longleftrightarrow \quad 4 - \frac{18}{2x+12} = x \\ & \Longleftrightarrow \quad 2x^2 - 8x - 30 = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad x^2 - 4x - 15 = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -5. \end{aligned}$$

Ainsi l'unique point fixe de f dans I est 3.

4. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution : Comme f est croissante la suite (u_n) est monotone. De plus

$$u_1 \ = \ f(u_0) \ = \ 4 - \frac{18}{2x6+12} \ < \ 6 = u_0.$$

Ainsi u_n est décroissante.

5. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution : Puisque l'intervalle $I = [0,18]$ est stable par f et $u_0 = 6 \in I$, on conclut que

$$\forall n, \ u_n = f(u_{n-1}) \in I.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante est minorée, donc convergente. De plus, sa limite est un **point fixe** de f dans I. Or l'unique point fixe de f dans I est 3. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 3.$$