Préing 1
Devoir Surveillé 2
Algèbre I

L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **Mercredi 29 Novembre 2023** *Durée :* **1h00** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

⋄ ⋄ ⋄

Exercice 1. (4 points) : Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\mathscr{R}$ la relation binaire sur E dont le graphe est

$$\Gamma = \Big\{(0,0),(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(3,5),(4,1),(4,2),(4,4),(5,3),(5,5),(6,6)\Big\}.$$

Rappelons que

$$a\mathscr{R}b \iff (a,b) \in \Gamma.$$

1. Montrer que la relation $\mathscr{R}$ est réflexive et symétrique

   Solution :

   (a) **Reflexive (1 point)** : Pour tout $x \in E$, nous pouvons vérifier que $(x, x) \in \Gamma$.

   (b) **Symétrique (1 point)** : Pour tout $(x, y) \in E^2$, nous pouvons vérifier que si $(x, y) \in \Gamma$ alors $(y, x) \in \Gamma$.

2. Montrer que la relation $\mathscr{R}$ est transitive **(1 point)**. En déduire toutes les classes d'équivalence. **(1 point)**

   Solution : La relation $\mathscr{R}$ possède quatre classes d'equivalences

$$\{0\} \quad ; \quad \{1,2,4\} \quad ; \quad \{3,5\} \quad ; \quad \{6\}.$$

Exercice 2. (6 points) :
Dans $\mathbb{N}$, on définit une relation en posant

$$m \preceq n \iff \exists k \in \mathbb{N},\ n = km.$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

— **Reflexive :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$n = 1 \cdot n \quad \Longrightarrow \quad n \preceq n.$$

— **Antisymetrie :** Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$m = nk,\ k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n = k'm,\ k' \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad m = kk'm \quad \Longrightarrow \quad kk' = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = k' = 1 \quad \Longrightarrow \quad m = n.$$

Donc

$$m \preceq n \quad \text{et} \quad n \preceq m \quad \Longrightarrow \quad m = n.$$

— **Transitive :** Pour tout $m, n, p \in \mathbb{N}$, nous avons

$$m = nk,\ k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad p = k'm,\ k' \in \mathbb{N} \Longrightarrow \quad p = kk'n.$$

Donc

$$n \preceq m \quad \text{et} \quad m \preceq p \quad \Longrightarrow \quad n \preceq p.$$

L'ordre $\preceq$ est-il total ?

Non, par exemple, entre 2 et 3 il n'y a pas de relation.

On considère dans la suite de l'exercice que l'ensemble $\mathbb{N}$ est ordonné par la relation $\preceq$.

2. L'ensemble $\mathbb{N}$ possède-t-il un plus petit élément ?
Solution : Oui, 1. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $n = 1 = n \cdot 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \preceq n$.
L'ensemble $\mathbb{N}$ possède-t-il un plus grand élément ?
Solution : Oui, 0. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $0 = 0 \cdot n$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \preceq 0$.
3. Soit $E = \{2, 4, 10, 14\}$.
L'ensemble E ordonné par la relation $\preceq$ possède-t-il un plus grand élément, une borne supérieur ? Justifier vos réponses.
Solution : L'ensemble E ne possède pas un plus grand élément. En effet, 4 ne divise pas 2, 10 ou 14. De même, 10 ne divise pas 2, 4 ou 14 et 14 ne divise pas 2, 4 ou 14. La borne supérieur de E est donne par le plus petit commun multiple de 2, 4, 10 et 14, c'est-à-dire 70.
L'ensemble E ordonné par la relation $\preceq$ possède-t-il un plus petit élément, une borne inférieur ?.
Solution : Le plus petit élément de E est 2, qui correspond aussi à la borne inférieur de E.

Exercice 3. (6 points) :

1. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right).$$

(a) Montrer que f est injective.

Solution : Soit $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x',y') &\iff \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) = \left(\frac{x'+y'}{2}, \frac{x'-y'}{2}\right) \\ &\iff \frac{x+y}{2} = \frac{x'+y'}{2} \quad \text{et} \quad \frac{x-y}{2} = \frac{x'-y'}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, si on additionne et puis soustrait les deux derniers égalités on obtient

$$x = x' \quad \text{et} \quad y = y \quad \Longrightarrow \quad (x,y) = (x',y')$$

(b) Montrer que f est surjective.

Solution : Soit $(m,n) \in \mathbb{R}^2$. Alors il existe $(x,y) \in R^2$ tel que

$$\begin{aligned} f(x,y) = (m,n) &\iff \frac{x+y}{2} = m \quad \text{et} \quad \frac{x-y}{2} = n \\ &\iff x = m+n \quad \text{et} \quad y = m-n \end{aligned}$$

Donc $f(m+n, m-n) = (m,n)$.

(c) Déterminer $f \circ f$.

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} f(f(x,y)) &= f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}}{2}, \frac{\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}(x,y). \end{aligned}$$

(d) Déterminer l'application réciproque de f.

Solution : D'après la question précédente, nous avons

$$f \circ f = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} \quad \Longrightarrow \quad f \circ (2 \cdot f) = (2 \cdot f) \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}.$$

Ainsi, la réciproque de f est donnée par

$$f^{-1} = 2 \cdot f$$

2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par
$$g(x,y) = \left(x^2+y^2, 2xy\right).$$
   (a) Est-ce que g est surjective ?
   Solution : Non, en effet toute couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \in \mathbb{R}_-^*$ ne possède pas d'antécédents.

Exercice 4. (4 points) : Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. En déduire que si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective.

Solution :

1. Soient $x, y \in E$. Supposons $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Nous voulons montrer que : $x = y$. Or
$$g(f(x)) = g(f(y)) \underbrace{\Longrightarrow}_{g \text{ injective}} f(x) = f(y) \underbrace{\Longrightarrow}_{f \text{ injective}} x = y.$$
2. Soit $y \in G$. Nous voulons montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x)$. Or g est surjective, donc il exist $t \in F$ tel que $y = g(t)$. Mais f est aussi surjective, donc : $t = f(x)$ pour un certain $x \in E$. Finalement, comme voulu :
$$y = g(t) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$
3. Si f est bijective, alors f est injective et surjective. Le même peut être dit pour g. La proposition est donc une conséquence directe des points 1 et 2.