

	<b>Préing 2 : DS 2 (sujet 1) d'Analyse dans <math>\mathbb{R}^n</math></b>	
	L'usage d'appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.	<i>Date</i> : <b>Lundi 11 Décembre 2023 à 16h30</b> <i>Durée</i> : <b>1h</b> <i>Nombre de pages</i> : <b>1 page recto verso</b>

*Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. Le sujet comporte 3 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*



### Exercice 1 : limite et continuité (6 points)

1. Déterminer si les applications suivantes sont continues sur  $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1 \text{ point})$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^3 + y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2 \text{ points})$$

2. Déterminer les dérivées partielles premières de  $g$  sur  $\mathbb{R}^2$ . (2 points)  
 3. Déterminer la limite suivante

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy + x^2 - y^2 + y}{x^2 + 3y^2 - xy + 2y} \quad (1 \text{ point})$$

### Exercice 2 : Différentiabilité (8 points)

Pour les 2 applications de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  suivantes, démontrer si elles sont différentiables ou non sur  $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2.5 \text{ points})$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y + 3y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (5.5 \text{ points})$$

### Exercice 3 : propriété $\mathcal{C}^1$ (6 points)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ . (1 point)  
 2. Sur quel domaine  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$ ? (5 points)