Devoir Surveillé 2
Algèbre I-MIM1-MIM2

L'usage de tout appareil électronique est interdit

Date :29/11/202
Durée : **1h00**
Nombre de pag

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justification

Le sujet comporte 5 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

⋄⋄⋄

Exercice 1. (3 points) :
On définit une relation $\mathscr{R}$ sur l'ensemble $A = \{1,2,3,4\}$ comme suit :

$$1\mathscr{R}1,\ 2\mathscr{R}2,\ 2\mathscr{R}3,\ 3\mathscr{R}2,\ 4\mathscr{R}2 \text{ et } 4\mathscr{R}4.$$

La relation $\mathscr{R}$ est-elle réflexive ? Symétrique ? Anti-symétrique ? Transitive ?

Exercice 2. (4 points) :
Déterminez si la relation suivante est réflexives, symétriques, antisymétriques ou transitives :

1. Sur $\mathbb{R}$ on définit :

$$x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow e^x \leq e^y$$

Exercice 3. (5 points) :
Sur $\mathbb{R}^2$, on définit une relation, notée $\precsim$ par :

$$(x,y) \precsim (x',y') \Longleftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

1. Montrer que la relation $\precsim$ est une relation d'ordre.
2. La relation $\precsim$ est-elle totale ?

Exercice 4. (4 points) :
Soit $f : E \to F$ une application, A et B deux parties de E, C et D deux parties de F.

1. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

Exercice 5. (6 points) :
Soit $f : E \longrightarrow F$, avec $E = F = \mathbb{R}$, l'application définie par

$$f(x) = x^2 + x.$$

1. f est injective ? surjective ? bijective ?
2. Dans le cas où f est non bijective, déterminer les ensembles E et F pour que f soit une bijection de E sur F.
3. Représenter graphiquement la fonction $f(x)$. Déterminer les ensembles suivants (en justifiant vos réponses) :

(a) $f(\mathbb{R})$

(b) $f(]0,2])$

(c) $f^{-1}(]-1,1[)$

(d) $f^{-1}([2,9[)$