# Devoir Surveillé 2
# Analyse II

CY TECH

| | |
|---|---|
| L'usage de tout appareil électronique est interdit | *Date :* **29 Avril 2024**<br>*Durée :* **1h00**<br>*Nombre de pages :* **1** |

**Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.**

◇ ◇ ◇

**Exercice 1.** (4 points)

1. Donner des équivalents pour les fonctions suivantes :
   (a) $g(x) = \dfrac{(1-\cos x)\ln(1+ex^3)}{x^3 \tan x}$ en 0.
   (b) $h(x) = \dfrac{\cos x - 1}{e^x - 1}$ en 0.
2. Calculer la limite de $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ lorsque $x$ tend vers 0.

**Exercice 2.** (6 points)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{x\ln(1-x)}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. $g(x) = \sin^2(x)(e^{x^2} - 1)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.

**Exercice 3.** (4 points)

1. Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f \underset{x_0}{\sim} g$, et $g \underset{x_0}{\sim} h$ alors $f \underset{x_0}{\sim} h$.
2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$, tel que $m \leq n$ et $f$ une fonction définie sur un voisinage de 0. Montrer que $f = o(x^n)$ implique $f = o(x^m)$
3. Montrer que :
$$\ln(x + \sqrt{x+1}) \underset{+\infty}{\sim} \ln x.$$

**Exercice 4.** (6 points)

1. Soit $(u_n)$ une suite vérifiant pour tout $n \geq 2$ naturel $\ln(n+1)u_n - \ln(n)u_{n-1} = n$ et soit $u_1 = 0$. En faisant intervenir une suite télescopique, déterminer un équivalent le plus simple possible de $u_n$ quand $n \to \infty$.
2. Montrer que $C_n^5 \sim \frac{n^5}{120}$ quand $n \to \infty$.
3. Déterminer un équivalent le plus simple possible de la suite $v_n = 4n\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$ quand $n \to \infty$
4. Calculer la limite de $C_n^5 \cdot v_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.