Préing 1 : MI3-GCA-MEF1-MI6
Devoir Surveillé 2

Matière : **Algèbre II**	*Date :* **Mardi 2 Avril 2024**
L'usage de tout appareil électronique est interdit.	*Durée :* **1h**
Le barème est donné à titre indicatif	*Nombre de pages :* **1**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. *Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1. (3 points)

1. Qu'appelle-t-on les coordonnées d'un vecteur dans une base $(e_1, \dots, e_n)$?
2. Démontrer que les coordonnées d'un vecteur dans une base sont uniques.

Exercice 2. (6 points)
Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 2z = 0\}.$$

1. Donner une base de F, une base de G, en déduire leur dimension respective.
2. Donner une base de $F \cap G$, et donner sa dimension.
3. Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base de F et des vecteurs de la base de G trouvées en 1 est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Est-elle libre ?

Exercice 3. (6 points)

1. On considère $v_1 = (1, 2, 1)$; $v_2 = (1, 4, a)$; $v_3 = (-1, 0, -2)$ et on pose $F = (v_1, v_2, v_3)$. Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ la famille F est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Soient $v_1 = (1, 2, 3, 0)$; $v_2 = (0, 2, 2, 4)$; $v_3 = (-1, 1, -1, 4)$ et soit $G = (v_1, v_2, v_3)$. Vérifier que cette famille est libre. Compléter G en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Sachant que la famille $H = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ avec $u_1 = (2, 1, -3)$; $u_2 = (2, 3, -1)$; $u_3 = (-1, 2, 4)$; $u_4 = (1, 1, -1)$ engendre $\mathbb{R}^3$, trouver une base de $\mathbb{R}^3$ contenue en H.
   Exprimer le vecteur $u = (1, 1, 1)$ dans cette base.

Exercice 4. (5 points)

Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble de solutions du système

$$(S) : \begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}.$$

1. Échelonner le système linéaire (S) et déterminer son rang.
2. Résoudre le système et en déduire que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner une base et la dimension de V.