CY TECH	**Préing 2 : DS 2 (sujet 1) d'Analyse dans $\mathbb{R}^n$**	
	L'usage d'appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.	*Date :* **Lundi 11 Décembre 2023 à 16h30** *Durée :* **1h** *Nombre de pages :* **1 page recto verso**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. *Le sujet comporte 3 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1 : limite et continuité (6 points)

1. Déterminer si les applications suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{(1 point)}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{(2 points)}$$

2. Déterminer les dérivées partielles premières de g sur $\mathbb{R}^2$. (2 points)
3. Déterminer la limite suivante

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy + x^2 - y^2 + y}{x^2 + 3y^2 - xy + 2y} \qquad \text{(1 point)}$$

1. Pour la fonction f :

   Pour $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:(1 point)
   Il s'agit du quotient de deux fonctions parfaitement définies et dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, donc la fonction est continue sur ce domaine.

   En $(0,0)$:(1 point)
   Passons en coordonnées polaires. Alors

$$\tilde{f} = \frac{\rho\cos(\theta)\rho\sin(\theta)}{|\rho\cos(\theta)| + |\rho\sin(\theta)|} = \rho\frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{|\cos(\theta)| + |\sin(\theta)|}$$

   or $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|\cos(\theta)| + |\sin(\theta)| > 0$ d'où l'on déduit que $\frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{|\cos(\theta)|+|\sin(\theta)|}$ est borné. Finalement

$$\lim_{\rho\to 0} \tilde{f} = 0 = f(0,0)$$

   donc f est continue en $(0,0)$.

Finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Pour la fonction g :
la fonction n'était pas la bonne. Elle aurait dû être

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^2}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dans ce cas :

<u>En $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:</u>
La fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais.

<u>En $(0,0)$:</u>
Alors

$$\left| \frac{x^4y^2}{x^4+y^6} \right| \leq y^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

donc g est continue en $(0,0)$.

Finalement g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Compte-tenu de l'erreur et du fait que la fonction n'est pas traitable, j'ai redistribué les 2 points sur l'exercice.

2. Calcul des dérivées premières de g.

<u>sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:</u>

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \frac{3x^2y^2(x^3+y^6) - 3x^5y^2}{(x^3+y^6)^2} = \frac{3x^2y^8}{(x^3+y^6)^2} \qquad \text{(1 point)}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \frac{2yx^3(x^3+y^6) - 6x^3y^7}{(x^3+y^6)^2} = \frac{2yx^6 - 4x^3y^7}{(x^3+y^6)^2} \qquad \text{(1 point)}$$

<u>En $(0,0)$:</u>

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,0)-g(0,0)}{t} = 0 \qquad \text{(0.5 point)}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{g(0,t)-g(0,0)}{t} = 0 \qquad \text{(0.5 point)}$$

3. On cherche maintenant à déterminer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy + x^2 - y^2 + y}{x^2 + 3y^2 - xy + 2y}$$

Or

$$h(x,x) = \frac{2x^2 + x^2 - x^2 + x}{x^2 + 3x^2 - x^2 + 2x} = \frac{2x^2 + x}{3x^2 + 2x} = \frac{2x+1}{3x+2}$$

$$\lim_{x \to 0} h(x,x) = \frac{1}{2}$$

Alors que

$$h(x,0) = \frac{x^2}{x^2} = 1 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$

on a donc trouvé 2 chemins qui mènent à des valeurs différentes de la limite, donc la limite n'existe pas en $(0,0)$ (1 point).

Exercice 2 : Différentiabilité (8 points)

Pour les 2 applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, démontrer si elles sont différentiables ou non sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{(2.5 points)}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{(5.5 points)}$$

Commençons par la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Pour $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:</u> (1 point)
f est $\mathcal{C}^1$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais sur cet ensemble. Or

$$\mathcal{C}^1 \Longrightarrow \text{différentiable.}$$

donc f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

<u>En $(0,0)$:</u> (1.5 points)
Prenons par exemple $f(x,0)$

$$f(x,0) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \pm\infty$$

donc la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$ et donc elle n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Etudions maintenant la fonction g :

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pour $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$: (1 point)
g est $\mathcal{C}^1$ sur ce domaine comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais. Or $\mathcal{C}^1$ implique différentiable, donc g est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

En $(0,0)$:
g est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \left[g(h_1,h_2) - g(0,0) - h_1 \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(0,0)} - h_2 \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(0,0)} \right] = 0 \qquad \text{(1 point)}$$

Il faut alors déterminer les dérivées partielles de g en $(0,0)$.

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,0)-g(0,0)}{t} = 0 \qquad \text{(0.5 point)}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{g(0,t)-g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{3t^3}{t^2} = 3 \qquad \text{(1 point)}$$

Alors g est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \left[\frac{h_1^2h_2+3h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - 3h_2 \right] = 0 \qquad \text{(0.5 point)}$$

Notons

$$\epsilon(h_1,h_2) = \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \left[\frac{h_1^2h_2+3h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - 3h_2 \right] = \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \left[\frac{h_1^2h_2+3h_2^3-3h_2h_1^2-3h_2^3}{h_1^2+h_2^2} \right] = \frac{-2h_1^2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}(h_1^2+h_2^2)}$$

Etudions maintenant $\epsilon(h_1,h_1)$:

$$\epsilon(h_1,h_1) = \frac{-2h_1^3}{2h_1^2\sqrt{2h_1^2}} = \frac{-h_1}{|h_1|\sqrt{2}}$$

ainsi

$$\lim_{h_1\to 0^+} \epsilon(h_1,h_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \qquad \text{(1.5 points)}$$

donc g n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3 : propriété $\mathcal{C}^1$ (6 points)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. (1 point)
2. Sur quel domaine f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? (5 points)

1. En $(0,0)$: (0.5 point)
   Passons en coordonnées polaires

$$\tilde{f}(\rho,\theta) = \frac{\rho^4 \sin^4(\theta)}{\rho^2} = \rho^2 \sin^4(\theta) \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} 0$$

   donc f est continue en $(0,0)$.

   Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$: (0.5 point)
   clairement f est continue sur ce domaine comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais.

2. Calcul des dérivées partielles premières :

   dérivées partielles en $(0,0)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0 \qquad \text{(0.5 point)}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t} = 0 \qquad \text{(1 point)}$$

   dérivées partielles pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = -\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{(1 point)}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \frac{4y^3(x^2+y^2) - 2y^5}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4y^3x^2 + 2y^5}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{(1 point)}$$

   Ainsi les fonctions dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$ sont données par

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \begin{cases} -\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \begin{cases} \frac{4y^3x^2+2y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Etudions la dérivée partielle par rapport à x qui semble clairement ne pas être continue. Posons, par commodité

$$h(x,y) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\neq(0,0)}$$

Passons en coordonnées polaires

$$\tilde{h}(\rho,\theta) = \frac{-2\rho^5 \cos(\theta)\sin^4(\theta)}{\rho^4} \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} \pm 0$$

donc la dérivée partielle par rapport à x est pas continue en $(0,0)$. Il en va de même pour la dérivée partielle par rapport à y. Donc les dérivées partielles premières de f sont continues en $(0,0)$. (1 point).

Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$:

Par contre f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais sur ce domaine. (0.5 point)