Consigne :

Exercice 1 :

1. Donner les équivalents en 0 des fonctions suivantes :

$$g(x) = \frac{(1-\cos(x))\ln(1+ex^3)}{x^3\tan(x)}$$

$$h(x) = \frac{\cos x - 1}{e^x - 1}$$

2. Calculer la limite :

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{h(x)}$$

Exercice 2 :

Calculer les développements limités suivants :

$$f(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x\ln(1-x)} \text{ à l'ordre 2}$$

$$g(x) = \sin^2(x)\left(e^{x^2} - 1\right) \text{ à l'ordre 5}$$

Exercice 3 :

1. Soient f, g, h trois fonctions définies dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$
   Montrer que si $\left(f \sim_{x_0} g\right)$ et $\left(g \sim_{x_0} h\right)$ alors $f \sim_{x_0} h$
2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ et f fonction définie au voisinage de 0.
   Montrer que $f = o(x^n)$ implique $f = o(x^m)$
3. Montrer que :
   $\ln\left(x + \sqrt{x+1}\right) \sim_{+\infty} \ln(x)$

Exercice 4 :

1.

Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \geq 2$, $\ln(n+1)\,u_n - \ln(n)\,u_{n-1} = n$

Soit $u_1 = 0$

Avec une suite télescopique, déterminer un équivalent le plus simple possible de u_n quand $n \to +\infty$

2.

Montrer que $\binom{n}{5} \sim_{+\infty} \frac{n^5}{120}$

3.

$$v_n = 4n\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

Déterminer un équivalent le plus simple possible de (v_n) en $+\infty$

4.

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{5} v_n = ?$$

Solution :

Exercice 1 :

1.

$$g(x) = \frac{(1-\cos(x))\ln(1+ex^3)}{x^3\tan(x)}$$

$$1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\ln(1+ex^3) \sim ex^3$$

$$\tan(x) \sim x$$

$$g(x) \sim \frac{ex}{2}$$

2.

$$h(x) = \frac{\cos x - 1}{e^x - 1}$$

$$\cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$h(x) \sim -\frac{x}{2}$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{ex}{2}\right)\left(-\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to 0} -e = -e$$

Exercice 2 :

1.

$$x\ln(1-x) = x\left((-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$x\ln(1-x) = x\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$x\ln(1-x) = -x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)$$

Soit $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

$$\ln(\cos(x)) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\frac{\ln(\cos(x))}{x\ln(1-x)} = \frac{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)}{-x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + o(x^4)}$$

$$f(x) = \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)}{-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$$

Soit $v = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$

$$\frac{1}{1+v} = 1 - v + v^2 + o(v^2)$$

$$\frac{1}{1+v} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{4} + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{24} + \frac{2x^2}{24} + o(x^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)$$

2.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\sin^2(x) = x^2 - \frac{2x^4}{3!} + o(x^5)$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)$$

$$e^{x^2} - 1 = x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)$$

$$g(x) = \left(x^2 - \frac{2x^4}{3!} + o(x^5)\right)\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)\right)$$

$$g(x) = x^4 + o(x^5)$$

Exercice 3 :

1.

$f \sim_{x_0} g$ donc $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$g \sim_{x_0} h$ donc $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 1$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} = 1$$

Donc $f \sim_{x_0} h$

2.

$f(x) = o(x^n)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

$m \leq n \Rightarrow n = m + p$ où $p \geq 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^m} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^{n-p}} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)x^p}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} \times \lim_{x \to 0} x^p = 0 \times \lim_{x \to 0} x^p = 0$$

Donc $f(x) = o(x^m)$

3.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{1+x}}{x} = 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{x} =_H \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = 0$$

$x + \sqrt{1+x} \sim x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x \neq 1$

$\ln\left(x + \sqrt{1+x}\right) \sim_{+\infty} \ln(x)$

Exercice 4 :

1.

$\forall n \geq 2, \qquad \ln(n+1)\, u_n - \ln(n)\, u_{n-1} = n$

$u_1 = 0$

$2 = \ln(3)\, u_2 - \ln(2)\, u_1$

$3 = \ln(4)\, u_3 - \ln(3)\, u_2$

$n - 1 = \ln(n)\, u_{n-1} - \ln(n-1)\, u_{n-2}$

$n = \ln(n+1)\, u_n - \ln(n)\, u_{n-1}$

$$\sum_{k=2}^{n} k = \ln(n+1)\, u_n - \ln(2)\, u_1$$

$$\sum_{k=2}^{n} k = \ln(n+1)\, u_n$$

$$u_n = \left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right) \sum_{k=2}^{n} k$$

$$\sum_{k=2}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \sim_{+\infty} n^2$$

$$\ln(n+1) \ \sim_{+\infty} \ln(n)$$

$$u_n \sim_{+\infty} n^2 \ln(n)$$

2.

$$\binom{n}{5} = \frac{n!}{5!\,(n-5)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = n^5 + o_{+\infty}(n^5)$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \sim_{+\infty} n^5$$

$$5! = 120$$

$$\binom{n}{5} \sim_{+\infty} \frac{n^5}{120}$$

3.

$$v_n = 4n\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$1 - \cos(X) \ \sim_0 \frac{X^2}{2}$$

$$1 - \cos\left(\frac{1}{n^3}\right) \ \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^6}$$

$$v_n \sim_{+\infty} \frac{2}{n^5}$$

4.

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{5} v_n$$

$$\binom{n}{5} v_n \sim \frac{1}{60}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{5} v_n = \frac{1}{60}$$