	Cycle préparatoire 2ème année Devoir surveillé 1	
CY TECH	*Matière* : **Séries**	*Date* : **Jeudi 17 décembre 2022**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **1 h 30 min**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

⋄⋄⋄

Exercice 1. [5 points]
Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^a}\right) \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{(-1)^n}{n^a}$$

On cherche à déterminer la nature (absolument convergente, semi-convergente ou divergente) de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ en fonction des valeurs de a.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ est convergente.
2. Montrer que $u_n \sim w_n$. En déduire les valeurs de a pour lesquelles la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est absolument convergente.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\sin(x)$. En déduire que si $a \in]\frac{1}{3};1[$ alors la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est semi-convergente.

Rappel : Une série numérique est dite semi-convergente si elle est convergente et non absolument convergente.

Exercice 2. [5 points]

1. Montrer la convergence de la série sumérique suivante :

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{\cos(n)}{\ln(n)}.$$

2. Etudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \exp\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) - 1.$$

Exercice 3. [4 points]
Soit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = x^n \sin(x).$$

1. Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0;1]$ vers une fonction f à déterminer.
2. Etudier la convergence uniforme de (f_n) vers f sur $[0;1]$.
3. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout intervalle $[0;\alpha]$ avec $\alpha \in]0;1[$.

Exercice 4. [4 points]
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$$

Etudier la convergence simple et uniforme de cette suite de fonctions sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5. [4 points]
Soit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} nx(1-nx)+nx & \text{si } x \in [0;\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que le suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0;1]$.
2. Calculer

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx$$

   Y a-t-il convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0;1]$.
3. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[\alpha;1]$ avec $\alpha \in]0;1[$.