CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 2** **Analyse I**	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **Jeudi 15 Décembre 2022** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇ ◇ ◇

Exercice 1 **(10 points)** : Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes. Sinon, justifier pourquoi il n'y a pas de limite.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{2n+\sqrt{4n^2+3}}{3n+\sqrt{n^2+1}}$. **(2 points)**

   Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{2n+\sqrt{4n^2+3}}{3n+\sqrt{n^2+1}} &= \frac{2n+\sqrt{4n^2\left(1+\frac{3}{4n^2}\right)}}{3n+\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} \\
&= \frac{2n+2n\sqrt{1+\frac{3}{4n^2}}}{3n+n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \\
&= \frac{2n\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{4n^2}}\right)}{n\cdot\left(3+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} \\
&= \frac{2\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{4n^2}}\right)}{3+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+\sqrt{4n^2+3}}{3n+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{4n^2}}\right)}{3+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2\cdot(1+1)}{3+1} = 1.$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1\right)$. **(2 points)**

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) &= n\cdot\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \\ &= n\cdot\frac{1+\frac{1}{n}-1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \\ &= n\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

3. $\forall n\in\mathbb{N},\ c_n = n^2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$. **(2 points)**

Solution : Notons que

$$\begin{aligned} \forall n\in\mathbb{N},\quad c_{6n} &= (6n)^2\cos\left(\frac{6n\pi}{3}\right) = 36n^2\cos(2n\pi) = 36n^2 \\ \forall n\in\mathbb{N},\quad c_{6n+3} &= (6n+3)^2\cos\left(\frac{(6n+3)\pi}{3}\right) = (6n+3)^2\cos(\pi+2n\pi) = -(6n+3)^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} c_{6n} &= +\infty \\ \lim_{n\to+\infty} c_{6n+3} &= -\infty. \end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé deux suites extraites de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne convergent pas vers la même limite. Ce qui implique que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

4. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ d_n = \frac{E(\sqrt{n})}{n}$. **(2 points)**

Solution : Nous avons

$$\sqrt{n}-1 < E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$$

Donc

$$\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{1}{n} < \frac{E(\sqrt{n})}{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n}.$$

Le théorème d'encadrement, nous permet donc de conclure

$$0 = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{1}{n} \leq \frac{E(\sqrt{n})}{n} \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{E(\sqrt{n})}{n}.$$

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n = \dfrac{4n-7}{3n+n^2} + i \cdot \dfrac{n^2 + i\cos(n)}{\sin(n) - 3n^2}$. **(2 points)**

Solution : Nous avons

$$\frac{4n-7}{3n+n^2} + i \cdot \frac{n^2 + i\cos(n)}{\sin(n) - 3n^2} = \left(\frac{4n-7}{3n+n^2} - \frac{\cos(n)}{\sin(n) - 3n^2}\right) + i \cdot \frac{n^2}{\sin(n) - 3n^2}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{4n-7}{3n+n^2} + i \cdot \frac{n^2 + i\cos(n)}{\sin(n) - 3n^2} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4n-7}{3n+n^2} - \frac{\cos(n)}{\sin(n) - 3n^2}\right) \\ &\quad + \quad i \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\sin(n) - 3n^2} \\ &= 0 + i \cdot \frac{1}{-3} = -\frac{i}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 2 (4 points) : Montrer, en revenant à la définition de la limite, que :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$, pour $u_n = \dfrac{4n^2 - 3}{2n^2 + 1}$. **(2 points)**

Solution : Soit $\epsilon > 0$, on cherche $N \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - 2| < \epsilon.$$

C'est-à-dire, on cherche $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\begin{aligned} \forall n \geq N,\ \left|\frac{4n^2-3}{2n^2+1} - 2\right| < \epsilon &\iff \forall n \geq N,\ \left|\frac{4n^2-3}{2n^2+1} - \frac{2(2n^2+1)}{2n^2+1}\right| < \epsilon \\ &\iff \forall n \geq N,\ \left|\frac{4n^2 - 3 - 4n^2 - 2}{2n^2+1}\right| < \epsilon \\ &\iff \forall n \geq N,\ \frac{5}{2n^2+1} < \epsilon. \end{aligned}$$

Maintenant

$$\forall n \geq \mathbb{N}^*,\ 2n^2 < 2n^2 + 1 \implies \frac{5}{2n^2+1} < \frac{5}{2n^2}$$

Donc il suffit de garantir

$$\frac{5}{2n^2} < \epsilon \text{ pour obtenir } \frac{5}{2n^2+1} < \epsilon.$$

Sachant que

$$\left(\frac{5}{2\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} < n \implies \frac{5}{2\epsilon} < n^2 \implies \frac{5}{2n^2} < \epsilon,$$

il suffit de poser

$$N = E\left(\left(\frac{5}{2\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + 1.$$

Alors pour tout $n \geq N$, nous avons

$$n \geq N > \left(\frac{5}{2\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \implies \frac{5}{2n^2+1} < \frac{5}{2n^2} < \epsilon \implies \left|\frac{4n^2-3}{2n^2+1} - 2\right| < \epsilon.$$

2. $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, pour $v_n = n^2 - n$. **(2 points)**

Solution : On doit vérifier

$$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad (n \geq N \implies v_n > M)\,.$$

Soit $M > 0$, on cherche $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \geq N, \quad v_n > M.$$

C'est-à-dire, on cherche $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n > N$, nous avons

$$n^2 - n \ > \ M.$$

Or on sait que

$$n^2 - n = n(n-1) > (n-1)^2$$

Donc il suffit de garantir

$$(n-1)^2 > M \ \text{ pour obtenir } \ n^2 - n \ > \ M.$$

Sachant que

$$n > \sqrt{M} + 1 \quad \implies \quad (n-1) > \sqrt{M} \quad \implies \quad (n-1)^2 > M,$$

il suffit de poser

$$N = E\left(\sqrt{M} + 1\right) + 1.$$

Alors pour tout $n \geq N$, nous avons

$$n \geq N > \sqrt{M} + 1 \quad \implies \quad n^2 - n \ > \ (n-1)^2 \ > \ M \quad \implies \quad n^2 - n \ > \ M.$$

Il vous est demandé de déterminer le rang N à partir duquel on a $|u_n - \ell| < \epsilon$, ou bien $u_n > A$ ou bien encore $u_n < B$ pour un $\epsilon > 0$, un $A > 0$ ou un $B < 0$ fixés.

Exercice 3 **(6.5 points)** : On considère les deux suites réelles définies par

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - u_n$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \ = \ \frac{1}{3^n}. \quad \textbf{(1 point)}$$

Calculer $\lim_{n\to+\infty} w_n$. **(0.5 points)**

Solution :

(a) Initialisation : $w_0 = v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1 = \frac{1}{3^0}$.

(b) Hérédite : Supposons $w_n = \frac{1}{3^n}$. Alors

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} \ = \ \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{2u_n + v_n}{3} \ = \ \frac{v_n - u_n}{3} \ = \ \frac{w_n}{3}.$$

Ainsi

$$w_{n+1} \ = \ \frac{w_n}{3} \ = \ \frac{1}{3^{n+1}}$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} \; = \; 0.$$

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. **(0.75 + 0.75 points)**

   Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2u_n + v_n}{3} \\ &= \frac{2u_n + (w_n + u_n)}{3} \\ &= \frac{3u_n + w_n}{3} \\ &= u_n + \frac{w_n}{3} \\ &= u_n + \frac{1}{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

   Ainsi

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0.$$

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. Le même raissonement nous permet de démontrer que

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3^{n+1}} < 0.$$

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

3. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et qu'elles ont la même limite. **(1 point)**

   Solution : Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En effet
   - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
   - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   - $v_n - u_n = w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

   Du **Théorème sur les suites adjacents**, on en déduit donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $t_n = u_n + v_n$. Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante. **(1 point)** En déduire que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera. **(0.5 points)**

   Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= v_{n+1} + u_{n+1} - (v_n + u_n) \\ &= \frac{u_n + 2v_n}{3} + \frac{2u_n + v_n}{3} - (v_n + u_n) \\ &= \frac{3u_n + 3v_n}{3} - \frac{3v_n + 3u_n}{3} = 0. \end{aligned}$$

   Ainsi, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante et

$$\forall n \in \mathbb{N},\; t_n \; = \; t_0 \; = \; u_0 + v_0 \; = \; 3.$$

   La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 3.

5. Déduire la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. **(1 point)**
Solution : Notons par ℓ la limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après la question précédente, nous avons

$$3 \;=\; \lim_{n\to+\infty} t_n \;=\; \lim_{n\to+\infty} u_n + v_n \;=\; \ell \;+\; \ell \;=\; 2\ell \quad\Longrightarrow\quad 3 \;=\; 2\ell.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n \;=\; \frac{3}{2}.$$

Exercice 4 (6 points) : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence de la manière suivante :

$$u_0 = 0 \quad\text{et}\quad u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 5} \;=\; 4 - \frac{18}{u_n + 5}.$$

On se placera dans $I = [0, +\infty[$. On pose

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{4x+2}{x+5} \;=\; 4 - \frac{18}{x+5}. \end{aligned}$$

1. Montrer que l'intervalle I est stable par f. **(1 point)**
Solution : Pour tout$x \in [0, +\infty$, nous avons

$$4x + 2 > 0 \quad\text{et}\quad x + 5 > 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{4x+2}{x+5} > 0$$

Ainsi

$$\forall x \in I, \quad f(x) \in I.$$

L'intervalle I est donc stable par f

2. Déterminer le(s) point(s) fixe(s) de f dans cet intervalle. **(1 point)**

Solution : Nous avons

$$\frac{4x+2}{x+5} = x \quad\Longleftrightarrow\quad 4x + 2 = x^2 + 5x \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 + x - 2 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = -2 \quad\text{ou}\quad x = 1.$$

Ainsi, l'unique point fixe de f dans I est 1.

3. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. **(2 points)**

Solution : Notons que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nous avons

$$\begin{aligned} x + 5 < y + 5 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{y+5} < \frac{1}{x+5} \quad&\Longrightarrow\quad -\frac{1}{x+5} < -\frac{1}{y+5} \\ &\Longrightarrow\quad f(x) = 4 - \frac{1}{x+5} < 4 - \frac{1}{y+5} = f(y). \end{aligned}$$

La fonction f est donc croissant (on peut aussi le vérifier en utilisant la dérivée). Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. De plus

$$u_1 - u_0 = \frac{2}{5} - 0 > 0 \quad\Longrightarrow\quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\text{ est croissante.}$$

4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. **(2 points)**

Solution : Puisque f est croissante et $f(1) = 1$, on conclut que

$$\begin{aligned} u_0 = 0 < 1 \quad &\Longrightarrow \quad u_1 = f(u_0) < 1 \quad \Longrightarrow \quad u_2 = f(u_1) < 1 \\ &\Longrightarrow \quad \cdots \quad \Longrightarrow \quad u_n = f(u_{n-1}) < 1. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall n, \ u_n < 1.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante est majorée par 1, donc convergente. De plus, sa limite est un **point fixe** de f dans $I = [0, +\infty]$. Or l'unique point fixe de f dans I est 1. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$