CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 1** **Algèbre I**	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **Mardi 6 Decembre 2022** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 5 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1. **(5 points)** : Soit $\mathscr{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x\mathscr{R}y \iff x = y = 0 \text{ ou } xy > 0.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

Solution :

(a) **Reflexive (0.5 points)** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$x = 0 \text{ ou } x^2 > 0$$

Donc $x\mathscr{R}x$.

(b) **Symétrique (0.5 points)** : Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nous avons

$$\begin{aligned} x\mathscr{R}y &\iff x = y = 0 \text{ ou } xy > 0 \\ &\iff y = x = 0 \text{ ou } yx > 0 \\ &\iff y\mathscr{R}x. \end{aligned}$$

(c) **Transitive (1 point)** : Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, nous avons

$$\begin{aligned} x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z &\iff x = y = 0 \text{ ou } xy > 0 \quad \text{et} \quad y = z = 0 \text{ ou } yz > 0 \\ &\iff x = y = 0 \text{ et } y = z = 0 \quad \text{ou} \quad xy > 0 \text{ et } yz > 0 \\ &\implies x = z = 0 \text{ ou } xz > 0 \\ &\implies x\mathscr{R}z. \end{aligned}$$

2. Décrire la classe d'equivalence de 0. **(1 point)**

   Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons
$$x\mathscr{R}0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$
   Donc $\mathrm{cl}(0) = \{0\}$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, décrire la classe d'equivalence de a. **(1 point)**

   Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons
$$x\mathscr{R}a \quad \Longleftrightarrow \quad x \cdot a > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 0.$$
   Donc $\mathrm{cl}(a) = \mathbb{R}_+^*$.

4. En deduire toutes les classes d'équivalence. **(1 point)**

   Solution : La relation $\mathscr{R}$ possède trois classes d'equivalence
$$\{0\} \quad ; \quad \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \mathbb{R}_-^*.$$

Exercice 2. **(5 points)** : Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide.
On note $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $f, g \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ on pose
$$f\mathscr{R}g \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E,\ f(x) \leqslant g(x).$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$.
   Solution :
   (a) **Reflexive (0.5 points)** : Pour tout $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$, nous avons
$$\forall x \in E,\ f(x) \leqslant f(x).$$
   Donc $x\mathscr{R}x$.
   (b) **Antisymétrique (0.5 points)** : Pour tout $(f,g) \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})^2$, nous avons
$$\forall x \in E,\ f(x) \leqslant g(x) \ \text{ et } g(x) \leqslant f(x) \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in E,\ f(x) = g(x).$$
   Donc $f = g$.
   (c) **Transitive (0.5 points)** : Pour tout $(f,g,h) \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})^3$, nous avons
$$\forall x \in E,\ f(x) \leqslant g(x) \ \text{ et } \ g(x) \leqslant h(x) \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in E,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

2. Est-ce un ordre total ? Justifier. **(1.5 points)**

   Solution : Non dès l'instant où card $E \geq 2$. Par exemple, soit $E = \mathbb{R}$, alors les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ ne sont pas comparables.

3. Soit $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$. On dit que f est **majoré** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in E,\ f(x) \leqslant M.$$

Montrer que si « f est majorée » alors « $A = \{f\}$ » possède un majorant pour la relation d'ordre $\mathscr{R}$ sur $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ **(1 point)**.
La réciproque est-elle vraie ? Justifier votre réponse. **(1 point)**

Solution : Si f est majorée alors la fonction constante $g(x) = M$ est un majorant de A. La réciproque est fausse. On peut par exemple choisir $f(x) = x$ et $g(x) = x+1$ avec $E = \mathbb{R}$. Alors g est un majorant de A mais f n'est pas majorée.

Exercice 3. **(4 points)** : Soit $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $\mathscr{R}$ la relation binaire sur E dont le graphe est

$$\Gamma = \big\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(2,5),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4),(4,5),(5,2),(5,4),(5,5),(6,6)\big\}.$$

Rappelons que

$$a\mathscr{R}b \iff (a,b) \in \Gamma.$$

1. Montrer que la relation $\mathscr{R}$ est réflexive et symétrique

   Solution :

   (a) **Reflexive (1 point) :** Pour tout $x \in E$, nous pouvons vérifier que $(x,x) \in \Gamma$.

   (b) **Symétrique (1 point) :** Pour tout $(x,y) \in E^2$, nous pouvons vérifier que si $(x,y) \in \Gamma$ alors $(y,x) \in \Gamma$.

2. Montrer que la relation $\mathscr{R}$ est transitive **(1 point)**. En déduire toutes les classes d'équivalence. **(1 point)**

   Solution : La relation $\mathscr{R}$ possède trois classes d'equivalence

$$\{1,3\} \quad ; \quad \{2,4,5\} \quad ; \quad \{6\}.$$

Exercice 4. **(6 points)** : Soit $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-1}.$$

1. Déterminer $f\left(\left]\frac{1}{2},1\right]\right)$ **(0.75 points)**, $f^{-1}([0,2])$ **(0.75 points)**, $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ **(0.5 points)**.

   Solution : Nous avons

$$f\left(\left]\frac{1}{2},1\right]\right) = [2,+\infty[\quad ; \quad f^{-1}([0,2]) =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty] \quad ; \quad f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \emptyset$$

2. f est-elle injective ? Justifier votre réponse. **(1 point)**

   Solution :Nous avons

$$\begin{aligned} f(x)=f(y) \quad \Longrightarrow \quad \frac{x+1}{2x-1}=\frac{y+1}{2y-1} \quad &\Longrightarrow \quad (x+1)(2y-1)=(y+1)(2x-1) \\ &\Longrightarrow \quad 2xy-x+2y-1=2xy-y+2x-1 \\ &\Longrightarrow \quad 3x=3y \quad \Longrightarrow \quad x=y. \end{aligned}$$

3. f est-elle surjective ? Justifier votre réponse. **(0.5 points)**

   Solution : Non, car $\frac{1}{2}$ n'a pas des antécédents.

4. Si f n'est pas bijective, déterminer les plus grands ensembles E et F tels que f soit une bijection de E sur F. **(0.5 + 0.5 points)**

   Solution : $E=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ et $F=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

5. Donner l'expression de « $f\circ f$ ». **(1 point)**

   Solution : Nous avons

$$f(f(x))=\frac{f(x)+1}{2f(x)-1}=\frac{\frac{x+1}{2x-1}+1}{\frac{2x+2}{2x-1}-1}=\frac{\frac{x+1+2x-1}{2x-1}}{\frac{2x+2-(2x-1)}{2x-1}}=\frac{\frac{3x}{2x-1}}{\frac{3}{2x-1}}=x$$

   Ainsi $f\circ f=\mathrm{Id}$.

6. En déduire la réciproque de f sur les ensembles E et F. **(0.5 points)**

   Solution : Puisque $f\circ f=\mathrm{Id}$, nous pouvons conclure que $f^{-1}=f$.

Exercice 5. **(4 points)** : Soit $f: E\to F$ une application, A et B deux parties de E, C et D deux parties de F.

1. Montrer que $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$. **(2 points)**
   Solution : Voir exercice 8 du TD.
2. Montrer que $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$. **(2 points)**
   Solution : Voir exercice 8 du TD.