Préing 2
Devoir Surveillé 2

Matière : **Analyse dans $\mathbb{R}^n$**	*Date :* **Jeudi 15 décembre 2022**
L'usage de tout appareil électronique est interdit.	
Aucun document n'est autorisé.	*Durée :* **1h30**
Le barème est donné à titre indicatif.	*Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. *Le sujet comporte trois exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1 :

Partie 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? (1 point)
2. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$. (2 points)
3. f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? (2 points)
4. f est-elle différentiable en $(0,0)$? Si oui, quelle est l'expression de la différentielle de f en $(0,0)$? (0.5 point)

Partie 2 : (1+2+1+1 points)

Mêmes questions que pour la Partie 1, pour la fonction suivante :

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Partie 3 : (3 points)

Etudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la différentiabilité en $(0,0)$ de la fonction

$$g_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 2 :

Etudier sur $\mathbb{R}^2$ la continuité des fonctions suivantes :

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{(x-1)^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (1,0). \\ 0, & \text{si } (x,y) = (1,0). \end{cases} \qquad \text{(1 point)}$$

$$w(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}, & \text{si } (x,y) \neq (2,0). \\ 0, & \text{si } (x,y) = (2,0). \end{cases} \qquad \text{(1.5 points)}$$

$$\Gamma(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)-1, & \text{si } x^2+y^2 > 1. \\ -\dfrac{1}{2}, & \text{si } x^2+y^2 \leq 1. \end{cases} \qquad \text{(1.5 points)}$$

Etudier la limite suivante :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ln(1+x^3)}{y(x^2+y^2)} \qquad \text{(1.5 points)}$$

Exercice 3 :

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé, f une application continue de E dans E et $c \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $||\cdot||$ est 1-lipschitzienne. (1 point)
2. $||\cdot||$ est-elle une application continue sur E ? (0.5 point)
3. Dire si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés, justifier (1.5 points)

$$A = \{x \in E / ||f(x)|| = c\} \; ; \; B = \{x \in E / ||f(x)|| < c\}$$