Exercice 1 :

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes. Sinon, justifier pourquoi il n'y a pas de limite.

1. $a_n = \sqrt{n^3+3n} - \sqrt{n^3+2}$
2. $b_n = \dfrac{7n^4+3^n}{5^n+2n}$
3. $c_n = \tan\left(\dfrac{n\pi}{5}\right)$
4. $d_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{2n^2}$. On pourra utiliser la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Correction :

1. $a_n = \dfrac{\left(\sqrt{n^3+3n}-\sqrt{n^3+2}\right)\left(\sqrt{n^3+3n}+\sqrt{n^3+2}\right)}{\sqrt{n^3+3n}+\sqrt{n^3+2}} = \dfrac{n^3+3n-\left(n^3+2\right)}{\sqrt{n^3+3n}+\sqrt{n^3+2}}$

$$a_n = \frac{3n-2}{\sqrt{n^3+3n}+\sqrt{n^3+2}} = \frac{n\left(3-\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{n^3}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^3}}\right)} = \frac{3-\frac{2}{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^3}}\right)}$$

$$a_n = \frac{3-\frac{2}{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^3}}\right)}$$

Le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers $+\infty(1+1) = +\infty$

Conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

2. $b_n = \dfrac{7n^4+3^n}{5^n+2n} = \dfrac{3^n\left(\frac{7n^4}{3^n}+1\right)}{5^n\left(1+\frac{2n}{5^n}\right)} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \dfrac{\frac{7n^4}{3^n}+1}{1+\frac{2n}{5^n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n^4}{3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n^4}{e^{n\ln(3)}} = 0$ par croissances comparées,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{5^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{e^{n\ln(5)}}=0 \quad \text{par croissances comparées,}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0 \quad \text{suite géométrique de raison } \frac{3}{5}<1.$$

Conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n=0$$

3. Pour étudier la suite $c_n=\tan\left(\frac{n\pi}{5}\right)$, considérons les suites extraites c_{5n} et c_{5n+1}.

- $c_{5n}=\tan\left(\frac{5n\pi}{5}\right)=\tan(n\pi)=0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to+\infty} c_{5n}=0.$
- $c_{5n+1}=\tan\left(\frac{(5n+1)\pi}{5}\right)=\tan\left(n\pi+\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)=cste \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to+\infty} c_{5n+1}=\tan\left(\frac{\pi}{5}\right).$

La suite c_n possède deux suites extraites qui ont des limites différentes, donc elle n'a pas de limite.

4. $$d_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2}=exp\left(2n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

On peut écrire : $$2n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=2\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

Sachant que : $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$ et que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0,$ on obtient par composition :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=1 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to+\infty} 2\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=2 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to+\infty} d_n=e^2$$

<u>Exercice 2 :</u>

Montrer, en revenant à la définition de la limite, que :

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n=3$, pour $u_n=\frac{3n^2+5}{n^2-2}$.

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, pour $v_n = -11n + 8$.

Il vous est demandé de déterminer le rang N à partir duquel on $|u_n - \ell| < \epsilon$, ou bien $u_n > A$ ou bien encore $u_n < B$ pour un $\epsilon > 0$, un $A > 0$ ou un $B < 0$ fixés.

Correction :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3 \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - 3| < \epsilon$

Soit $\epsilon > 0$ fixé. Peut-on trouver un rang N à partir duquel on a : $|u_n - \frac{2}{3}| < \epsilon$??

$$\left|u_n - 3\right| < \epsilon \iff \left|\frac{3n^2+5}{n^2-2} - 3\right| < \epsilon \iff \left|\frac{3n^2+5-3\left(n^2-2\right)}{n^2-2}\right| < \epsilon$$

$$\left|u_n - 3\right| < \epsilon \iff \left|\frac{11}{n^2-2}\right| < \epsilon \iff \frac{11}{n^2-2} < \epsilon$$

$$\left|u_n - 3\right| < \epsilon \iff n^2 - 2 > \frac{11}{\epsilon} \iff n^2 > \frac{11}{\epsilon} + 2 \iff n > \sqrt{\frac{11}{\epsilon} + 2}$$

Il suffit donc de prendre $N = E\left(\sqrt{\frac{11}{\epsilon} + 2}\right) + 1$, pour avoir : $\forall n \geqslant N,\ |u_n - 3| < \epsilon$

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty \iff \forall B < 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ v_n < B$

Soit $B < 0$ fixé. Peut-on trouver un rang N à partir duquel on a : $v_n < B$??

$$v_n < B \iff -11n + 8 < B \iff -11n < B - 8 \iff 11n > 8 - B$$

$$v_n > A \iff n > \frac{8-B}{11}$$

Il suffit donc de prendre $N = E\left(\frac{8-B}{11}\right) + 1$, pour avoir : $\forall n \geqslant N,\ v_n > A$

Exercice 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -3$.

Montrer que l'on peut trouver un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel on a : $-4 < u_n < -2$.

Autrement dit, $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ -4 < u_n < -2$.

Correction :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -3 \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n + 3| < \epsilon$

Si on choisit $\epsilon = 1$, cette définition nous garantit que :

$$\exists N \in \mathbb{N},\quad \forall n \geqslant N,\quad |u_n + 3| < 1$$

Or : $\quad |u_n + 3| < 1 \iff -1 < u_n + 3 < 1 \iff -1 - 3 < u_n < 1 - 3$

Donc on a bien : $\quad \exists N \in \mathbb{N},\quad \forall n \geqslant N,\quad -4 < u_n < -2$

Exercice 4 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

On pose : $a_n = u_{2n}$, et $\quad b_n = u_{2n+1}$.

Montrer, à l'aide de ces deux suites extraites, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Correction :

a) $a_{n+1} - a_n = u_{2(n+1)} - u_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!}$

Donc : $\quad a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{-1}{(2n+1)!} + \frac{1}{(2n+2)!} < 0$

La suite a_n est décroissante.

$b_{n+1} - b_n = u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = u_{2n+3} - u_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$

Donc : $\quad b_{n+1} - b_n = \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+3)!} > 0$

La suite b_n est croissante.

b) $b_n - a_n = u_{2n+1} - u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \implies \lim_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$$

c) Les deux suites sont adjacentes, donc d'après le théorème de même nom, elle sont convergentes vers la même limite.

d) Les deux suites extraites u_{2n}, et u_{2n+1} convergent vers la même limite, par conséquent, la suite mère $(u_n)_n$ est convergente vers cette même limite.

Exercice 5 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence de la manière suivante :

$$u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}$$

1. Etudier la convergence de cette suite pour $u_0 = 0$. On se placera dans $I = [0;7]$.
   On vous demande de justifier la stabilité de I, de déterminer le sens de variation de la suite, de justifer sa convergence et enfin de déterminer sa limite.
2. Même question en partant de $u_0 = 7$.

Correction :

1. Il s'agit d'une suite récurrente définie à l'aide de la fonction : $x \mapsto f(x) = \sqrt{4+3x}$

- L'intervalle $I = [0\ ;\ 7]$ est stable par f car :
  $x \in I \implies 0 \leqslant x \leqslant 7 \implies 0 \leqslant 3x \leqslant 21 \implies 4 \leqslant 4+3x \leqslant 25$
  $\implies \sqrt{4} \leqslant \sqrt{4+3x} \leqslant \sqrt{25} \implies 2 \leqslant f(x) \leqslant 5 \implies f(x) \in I.$

- f est croissante sur $I \implies$ la suite u_n est monotone.
  $u_0 = 0 \implies u_1 = f(u_0) = 2$.
  $u_1 > u_0 \implies u_n$ croissante .

- Tous les termes de la suite se trouvent dans l'intervalle I, puisque $u_0 \in I$. On en déduit :
  u_n croissante et majorée par $7 \implies u_n$ convergente vers $\ell \in I$

- u_n est une suite récurrente définie à l'aide de $f \implies \ell$ est un point fixe de f.

- Les points fixes de f sont les solutions de $f(x) = x$.
  $f(x) = x \iff \sqrt{4+3x} = x \iff 4+3x = x^2 \iff x^2 - 3x - 4 = 0$

  On trouve 2 solutions : $-1 \notin I$ et $\ell = 4$ unique point fixe de f dans I.

- Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

2.

- $u_0 = 7 \implies u_1 = f(u_0) = 5$.
  $u_1 < u_0 \implies u_n$ décroissante .

- Tous les termes de la suite se trouvent dans l'intervalle I, puisque $u_0 \in I$. On en déduit :
  u_n décroissante et minorée par $0 \implies u_n$ convergente vers $\ell \in I$

- u_n est une suite récurrente définie à l'aide de $f \implies \ell$ est un point fixe de f.

  et $\ell = 4$ unique point fixe de f dans I.

- Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

Exercice 6 :

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes. Sinon, justifier pourquoi il n'y a pas de limite.

1. $z_n = \dfrac{2n+3}{5-n^2} + i\dfrac{3n^2+(-1)^n}{n^2+1}$.
2. $z_n = e^{i\frac{2n\pi}{3}}$.

Correction :

1. $z_n = \dfrac{2n+3}{5-n^2} + i\dfrac{3n^2+(-1)^n}{n^2+1}$

$Re(z_n) = \dfrac{2n+3}{5-n^2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n}{-n^2} = 0.$

$Im(z_n) = \dfrac{3n^2+(-1)^n}{n^2+1}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^2}{n^2} = 3.$

Finalement, $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 0 + 3i = 3i.$

2. Pour étudier la suite $z_n = e^{i\frac{2n\pi}{3}}$, considérons les suites extraites z_{3n} et z_{3n+1}.

- $z_{3n} = e^{i\frac{2(3n)\pi}{3}} = e^{i2n\pi} = 1 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} z_{3n} = 1.$
- $z_{3n+1} = e^{i\frac{2(3n+1)\pi}{3}} = e^{i2n\pi + i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = cste = j \implies \lim\limits_{n \to +\infty} z_{3n+1} = j \neq 1.$

La suite z_n possède deux suites extraites qui ont des limites différentes, donc elle n'a pas de limite.