CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 2** **Algèbre I**	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date:* **Mardi 7 Decembre 2021** *Durée:* **1h30** *Nombre de pages:* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 5 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

⋄ ⋄ ⋄

Exercice 1

Dans $\mathbb{N}^*$, on définit une relation en posant

$$m \preceq n \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}^*,\ n = km.$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

   - **Reflexive:** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

   $$n = 1 \cdot n \quad \Longrightarrow \quad n \preceq n.$$

   - **Antisymetrie:** Pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

   $$m = nk,\ k \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad n = k'm,\ k' \in \mathbb{N}^* \quad \Longrightarrow \quad m = kk'm \quad \Longrightarrow \quad kk' = 1 \quad \Longrightarrow \quad k = k' = 1 \quad \Longrightarrow \quad m = n.$$

   Donc

   $$m \preceq n \quad \text{et} \quad n \preceq m \quad \Longrightarrow \quad m = n.$$

   - **Transitive:** Pour tout $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, nous avons

   $$m = nk,\ k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad p = k'm,\ k' \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \quad p = kk'n.$$

   Donc

   $$n \preceq m \quad \text{et} \quad m \preceq p \quad \Longrightarrow \quad n \preceq p.$$

   L'ordre $\preceq$ est-il total?

   Non, par exemple, entre 2 et 3 il n'y a pas de relation.

   On considère dans la suite de l'exercice que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est ordonné par la relation $\preceq$.

2. L'ensemble $\mathbb{N}^*$ possède-t-il un plus grand élément?
L'ensemble

Non. Par l'absurde, supposons donc que $\mathbb{N}^*$ admette un plus grand élément noté M alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad kM = k \cdot M \quad \Longrightarrow \quad M \preceq 2M.$$

Ce qui signifie que kM est plus grand (au sens de $\preceq$) que M ce qui est contradictoire puisque M est le plus grand éléḿent, donc il n'y a pas de plus grand élément.

$\mathbb{N}^*$ possède-t-il un plus petit élément?

Oui, 1. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $n = 1 \cdot n$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \preceq n$.

3. Soit $E = \{3,4,5,30\}$.
L'ensemble E ordonné par la relation $\preceq$ possède-t-il un plus grand élément?

Non. En effet, 3,4 et 5 sont premiers entre eux, aucune d'entre eux ne peut donc pas être le plus grand éléḿent. De plus 4 ne divise pas 30, donc 30 n'est peut pas non plus être le plus grand éléḿent.

L'ensemble E ordonné par la relation $\preceq$ possède-t-il un petit élément?

Non. En effet, 3,4 et 5 sont premiers entre eux, aucune d'entre eux ne peut donc pas être le plus petit éléḿent. De plus $3 \preceq 30$ et $5 \preceq 30$, donc 30 n'est peut pas non plus être le plus petit éléḿent.

Exercice 2
On définit sur $\mathbb{R}$ la relation

$$x \mathscr{R} y \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

Tout d'abord, notons que

$$x \mathscr{R} y \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - y^2 = x - y \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - x = y^2 - y.$$

Ainsi

- **Reflexive:** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$x^2 - x = x^2 - x \quad \Longrightarrow \quad x \mathscr{R} x.$$

- **Symetrique:** Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, nous avons

$$x^2 - x = y^2 - y \quad \Longrightarrow \quad y^2 - y = x^2 - x.$$

Donc

$$x \mathscr{R} y \quad \Longrightarrow \quad y \mathscr{R} x.$$

- **Transitive:** Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, nous avons

$$x^2 - x = y^2 - y \quad \text{et} \quad y^2 - y = z^2 - z \Longrightarrow \quad x^2 - x = z^2 - z.$$

  Donc

$$x\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}z \quad \Longrightarrow \quad x\mathscr{R}z.$$

2. Déterminer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$.
   Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe?

   Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
[x] &= \{y \in \mathbb{R} : x\mathscr{R}y\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \quad x^2 - x = y^2 - y\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \quad x^2 - y^2 - (x - y) = 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \quad (x - y)(x + y) - (x - y) = 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \quad (x - y)(x + y - 1) = 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \quad y = x \quad \text{ou} \quad y = 1 - x\}.
\end{aligned}$$

   Ainsi, la classe de x est constituée de deux éléments, sauf si

$$x = 1 - x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

   Dans ce cas, la classe est donnée par $\{\frac{1}{2}\}$.

Exercice 3

Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ l'application de E dans F définie par

$$f(x) = |1 + x| + |1 - x| - 2.$$

1. On suppose que $E = F = \mathbb{R}$.

   (a) Étant donné un réel x_0, comparer $f(x_0)$ et $f(-x_0)$.
   La fonction f est-elle injective ?

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
f(-x_0) = |1 - x_0| + |1 - (-x_0)| - 2 &= |1 - x_0| + |1 + x_0| - 2 \\
&= |1 + x_0| + |1 - x_0| - 2 = f(x_0).
\end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, nous avons $f(x_0) = f(-x_0)$. La application est donc paire. Ce qui implique que l'application f n'est pas injective.

(b) Donner les différentes expressions de f (en supprimant les valeurs absolues).

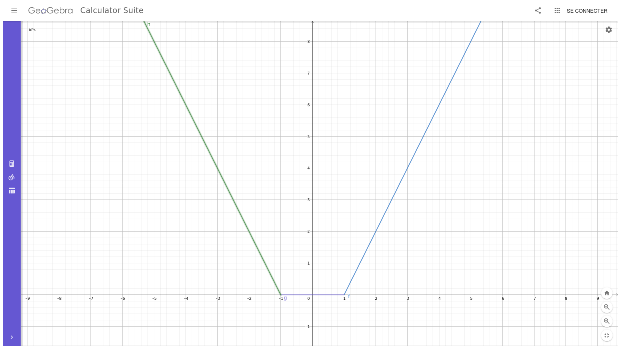
Puisque f est paire, il suffit d'étudier l'application sur l'intervalle $[0,+\infty]$. Nous avons

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)+(1-x)-2=0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ (1+x)-(1-x)-2=2x-2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Comme f est paire on déduit

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2 & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x-2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Représenter graphiquement la fonction.



(c) Déterminer $f(\mathbb{R})$.

En regardant le graphe de f on conclut que

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+.$$

(d) La fonction f est-elle surjective ?

Puisque $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ \neq \mathbb{R}$, on conclut que l'application n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose que $E = [1,+\infty[$ et $F = \mathbb{R}_+$.
Donner l'expression de f et déterminer, si elle existe, l'application réciproque f^{-1} de F dans E.

D'après la questions précédent, l'application

$$f(x) = |1+x| + |1-x| - 2$$

est donnée sur $[1,+\infty[$e, par

$$f(x) = 2x-2.$$

De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, nous avons

$$y = 2x - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y+2}{2} = x.$$

Ce qui nous permet de conclure que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, y possède **un unique antécédent** donné par

$$\frac{y+2}{2}.$$

Par conséquent, f est bijective. Elle dispose donc d'une application réciproque, qui est donnée par

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1, +\infty] \\ y & \longmapsto & \dfrac{y+2}{2}. \end{array}$$

Exercice 4

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
Démontrer pour tout $A \subset E$ et tout $B \subset F$, l'équivalence:

$$f(A) \cap B \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset.$$

On raisonne par double implication. Supposons

$$\begin{array}{rcl} f(A) \cap B \neq \emptyset & \Longrightarrow & \exists y \in F, \quad y \in f(A) \cap B \\ & \Longrightarrow & \exists y \in F, \quad y \in f(A) \quad \text{et} \quad y \in B \\ & \Longrightarrow & \exists x \in A, \quad y = f(x) \quad \text{et} \quad f(x) \in B \\ & \Longrightarrow & \exists x \in A, \quad x \in f^{-1}(B) \\ & \Longrightarrow & \exists x \in E, \quad x \in A \cap f^{-1}(B) \\ & \Longrightarrow & A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset. \end{array}$$

De même

$$\begin{array}{rcl} A \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset & \Longrightarrow & \exists x \in E, \quad x \in A \cap f^{-1}(B) \\ & \Longrightarrow & \exists x \in E, \quad x \in A \quad \text{et} \quad x \in f^{-1}(B) \\ & \Longrightarrow & \exists x \in E, \quad x \in A \quad \text{et} \quad f(x) \in B \\ & \Longrightarrow & \exists x \in E, \quad f(x) \in f(A) \quad \text{et} \quad f(x) \in B \\ & \Longrightarrow & f(x) \in f(A) \cap B \\ & \Longrightarrow & f(A) \cap B \neq \emptyset. \end{array}$$

Exercice 5

1. Mettre sous forme algébrique les nombres suivants

$$\frac{4+5i}{2+2i}-\frac{4-5i}{2-2i} \quad ; \quad (1+i)^8.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{4+5i}{2+2i}-\frac{4-5i}{2-2i} &= \frac{4+5i}{2+2i}-\overline{\frac{4+5i}{2+2i}}\\ &= 2i\mathrm{Im}\left(\frac{4+5i}{2+2i}\right).\end{aligned}$$

Or

$$\frac{4+5i}{2+2i}=\frac{(4+5i)(2-2i)}{8}=\frac{1}{8}(18+2i).$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{4+5i}{2+2i}-\frac{4-5i}{2-2i} &= 2i\mathrm{Im}\left(\frac{4+5i}{2+2i}\right)\\ &= 2i\left(\frac{2}{8}\right)=\frac{i}{2}.\end{aligned}$$

Nous avons

$$1+i=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \quad \Longrightarrow \quad (1+i)^8=(\sqrt{2})^8e^{\frac{i8\pi}{4}}=2^4e^{i2\pi}=16.$$

2. Donner le module et un argument des nombres complexes suivants

$$-6 \quad ; \quad 11i \quad ; \quad i+\sqrt{3} \quad ; \quad \frac{1}{1-i}.$$

- module$(-6)=6$ et $\arg(-6)=\pi$.
- module$(11i)=11$ et $\arg(11i)=\frac{\pi}{2}$.
- module$(\sqrt{3}+i)=2$ et $\arg\sqrt{3}+i=\frac{\pi}{6}$.
- module$\left(\frac{1}{1-i}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\arg\left(\frac{1}{1-i}\right)=\frac{\pi}{4}$.