Corrigé DM 2

Exercice 1 :

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes. Sinon, justifier pourquoi il n'y a pas de limite.

1. $a_n = n^2 - \sqrt{n^4 - 3n^2 + 1}$
2. $b_n = \dfrac{e^{2n} + 2^n}{e^n + 1}$
3. $c_n = \sin\left(\dfrac{n^2\pi}{3}\right)$
4. $d_n = \sqrt[n]{3 - \sin\left(n^2\right)}$.

Correction :

1. $$a_n = \frac{\left(n^2 - \sqrt{n^4 - 3n^2 + 1}\right)\left(n^2 + \sqrt{n^4 - 3n^2 + 1}\right)}{n^2 + \sqrt{n^4 - 3n^2 + 1}} = \frac{n^4 - \left(n^4 - 3n^2 + 1\right)}{n^2 + \sqrt{n^4 - 3n^2 + 1}}$$

$$a_n = \frac{3n^2 - 1}{n^2\left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}}\right)} = \frac{n^2\left(3 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}}\right)} = \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}}}$$

Le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers $(1 + 1) = 2$

Conclusion :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{3}{2}$$

2. $$b_n = \frac{e^{2n} + 2^n}{e^n + 1} = \frac{\left(e^2\right)^n + 2^n}{e^n + 1} = \frac{\left(e^2\right)^n\left(1 + \frac{2^n}{\left(e^2\right)^n}\right)}{e^n\left(1 + \frac{1}{e^n}\right)} = \frac{\left(e^2\right)^n}{e^n}\,\frac{1 + \left(\frac{2}{e^2}\right)^n}{1 + e^{-n}} = \left(\frac{e^2}{e}\right)^n\,\frac{1 + \left(\frac{2}{e^2}\right)^n}{1 + e^{-n}}$$

$$b_n = e^n \frac{1+\left(\frac{2}{e^2}\right)^n}{1+e^{-n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\left(\frac{2}{e^2}\right)^n}{1+e^{-n}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$$

3. $c_n = \sin\left(\frac{n^2\pi}{3}\right)$

Considérons les suites extraites suivantes : c_{6n} et c_{6n+1}.

- $c_{6n} = \sin\left(\frac{(6n)^2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{36n^2\pi}{3}\right) = \sin\left(12n^2\pi\right) = cste = 0$

  Donc $\lim_{n\to+\infty} c_{6n} = 0.$

- $c_{6n+1} = \sin\left(\frac{(6n+1)^2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\left(36n^2+12n+1\right)\pi}{3}\right) = \sin\left(\left(12n^2+4n\right)\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

  $c_{6n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = cste = \frac{\sqrt{3}}{2}$

  Donc $\lim_{n\to+\infty} c_{6n} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

La suite c_n possède deux suites extraites qui ont des limites différentes, donc elle n'a pas de limite.

4. $d_n = \sqrt[n]{3-\sin\left(n^2\right)}.$

$$-1 \leqslant \sin\left(n^2\right) \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad 2 \leqslant 3-\sin\left(n^2\right) \leqslant 4 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{2} \leqslant \sqrt[n]{3-\sin\left(n^2\right)} \leqslant \sqrt[n]{4}$$

$$\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln 2}{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln 2}{n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = e^0 = 1$$

Même chose pour $\sqrt[n]{4} = 4^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln 4}{n}}$. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = 1$$

Exercice 2 :

Montrer, en revenant à la définition de la limite, que :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{3}$, pour $u_n = \frac{1-2n}{2-3n}$.
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, pour $v_n = 3\ln(n+5)$.

Il vous est demandé de déterminer le rang N à partir duquel on $|u_n - \ell| < \epsilon$, ou bien $u_n > A$ ou bien encore $u_n < B$ pour un $\epsilon > 0$, un $A > 0$ ou un $B < 0$ fixés.

Correction :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{3} \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ |u_n - \frac{2}{3}| < \epsilon$

Soit $\epsilon > 0$ fixé. Peut-on trouver un rang N à partir duquel on a : $|u_n - \frac{2}{3}| < \epsilon$??

$$\left|u_n - \frac{2}{3}\right| < \epsilon \iff \left|\frac{1-2n}{2-3n} - \frac{2}{3}\right| < \epsilon \iff \left|\frac{3(1-2n)-2(2-3n)}{3(2-3n)}\right| < \epsilon$$

$$\left|u_n - \frac{2}{3}\right| < \epsilon \iff \left|\frac{-1}{3(2-3n)}\right| < \epsilon \iff \frac{1}{3(3n-2)} < \epsilon$$

$$\left|u_n - \frac{2}{3}\right| < \epsilon \iff 3(3n-2) > \frac{1}{\epsilon} \iff 9n > \frac{1}{\epsilon} + 6 \iff n > \frac{1}{9\epsilon} + \frac{6}{9}$$

Il suffit donc de prendre $N = E\left(\frac{1}{9\epsilon} + \frac{2}{3}\right) + 1$, pour avoir : $\forall n \geqslant N,\ \ |u_n - \frac{2}{3}| < \epsilon$

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ v_n > A$

Soit $A > 0$ fixé. Peut-on trouver un rang N à partir duquel on a : $v_n > A$??

$$v_n > A \iff 3\ln(n+5) > A \iff \ln(n+5) > \frac{A}{3} \iff n+5 > e^{\frac{A}{3}}$$

$$v_n > A \iff n > e^{\frac{A}{3}} - 5$$

Il suffit donc de prendre $N = E\left(e^{\frac{A}{3}} - 5\right) + 1$, pour avoir : $\forall n \geqslant N,\ \ v_n > A$

Exercice 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On suppose que les 3 suites extraites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ possèdent la même limite réelle ℓ.

On veut montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. Pour cela fixons un nombre $\epsilon > 0$.

1. Justifer qu'il existe un entier $N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_1, \quad |u_{3n} - \ell| < \epsilon$
2. Justifier qu'il existe de même N_2 et N_3 qui réalisent la même condition pour u_{3n+1} et u_{3n+2}.
3. On pose $N = Max(3N_1 \ ; \ 3N_2 + 1 \ ; \ 3N_3 + 2)$.
   Montrer que : $\forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \epsilon$ et conclure.

Correction :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{3n} = \ell \quad \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_{3n} - \ell| < \epsilon$

Une fois $\epsilon > 0$ fixé, la définition précédente nous garantit l'existence d'un entier

$$N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_1, \quad |u_{3n} - \ell| < \epsilon$$

2. Une fois $\epsilon > 0$ fixé, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{3n+1} = \ell \quad \Longrightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_2, \quad |u_{3n+1} - \ell| < \epsilon$

De même : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{3n+2} = \ell \quad \Longrightarrow \exists N_3 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_3, \quad |u_{3n+2} - \ell| < \epsilon.$

3. On pose $N = Max(3N_1 \ ; \ 3N_2 + 1 \ ; \ 3N_3 + 2)$.

Soit n un entier supérieur ou égal à N. Selon le reste de la division euclidienne de n par 3, nous avons 3 cas :

- reste $= 0 \quad \Longrightarrow \quad n = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas :
  $n \geqslant N \Longrightarrow n = 3k \geqslant 3N_1 \Longrightarrow k \geqslant N_1 \Longrightarrow |u_{3k} - \ell| < \epsilon \Longrightarrow |u_n - \ell| < \epsilon$
- reste $= 1 \quad \Longrightarrow \quad n = 3k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas :
  $n \geqslant N \Longrightarrow n = 3k + 1 \geqslant 3N_2 + 1 \Longrightarrow k \geqslant N_2 \Longrightarrow |u_{3k+1} - \ell| < \epsilon \Longrightarrow |u_n - \ell| < \epsilon$
- reste $= 2 \quad \Longrightarrow \quad n = 3k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas :
  $n \geqslant N \Longrightarrow n = 3k + 2 \geqslant 3N_3 + 2 \Longrightarrow k \geqslant N_3 \Longrightarrow |u_{3k+2} - \ell| < \epsilon \Longrightarrow |u_n - \ell| < \epsilon$

Dans les 3 cas, on a le même résultat : $n \geqslant N \quad \Longrightarrow |u_n - \ell| < \epsilon$

On peut donc toujours trouver un rang N à partir duquel on a : $|u_n - \ell| < \epsilon$

Donc $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_{3n} - \ell| < \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

Exercice 4 :

On pose $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $y_n = x_n + \dfrac{1}{n}$.

Montrer que ces suites sont adjacentes et conclure.

Correction :

a) $x_{n+1} - x_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

La suite x_n est croissante.

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(x_n + \frac{1}{n}\right) = x_{n+1} - x_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{(n+1)^2} < 0$$

La suite y_n est décroissante.

b) $y_n - x_n = \frac{1}{n} \implies \lim_{n \to +\infty} y_n - x_n = 0$

c) Les deux suites sont adjacentes, donc d'après le théorème de même nom, elle sont convergentes vers la même limite.

Exercice 5 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence de la manière suivante :

$$u_{n+1} = 3 + \frac{2}{u_n}$$

Etudier la convergence de cette suite pour $u_0 = 2$. On se placera dans $I = [1 \,;\, 5]$.

Correction :

Il s'agit d''une suite récurrente définie à l'aide de la fonction : $x \mapsto f(x) = 3 + \frac{2}{x}$

- L'intervalle $I = [1 \,;\, 5]$ est stable par f car :

  $$x \in I \implies 1 \leqslant x \leqslant 5 \implies \frac{2}{5} \leqslant \frac{2}{x} \leqslant \frac{2}{1} \implies 3 + \frac{2}{5} \leqslant 3 + \frac{2}{x} \leqslant 3 + \frac{2}{1}$$

  $$\implies 3 + \frac{2}{5} \leqslant f(x) \leqslant 5 \implies f(x) \in I.$$

- f est décroissante sur $I \implies$ les suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} sont monotones de sens opposés.

  $$u_0 = 2 \implies u_1 = f(u_0) = 4 \implies u_2 = f(u_1) = \frac{7}{2}.$$

  $u_2 > u_0 \implies u_{2n}$ croissante $\implies u_{2n+1}$ décroissante.

- Tous les termes de la suite se trouvent dans l'intervalle I, puisque $u_0 \in I$. On en déduit :
  u_{2n} croissante et majorée par $5 \implies u_{2n}$ convergente vers $\ell_1 \in I$
  u_{2n+1} décroissante et minorée par $1 \implies u_{2n+1}$ convergente vers $\ell_2 \in I$

- u_{2n} est une suite récurrente définie à l'aide de $f \circ f \implies \ell_1$ est un point fixe de $f \circ f$.
  u_{2n+1} est une suite récurrente définie à l'aide de $f \circ f \implies \ell_2$ est un point fixe de $f \circ f$.

- Les points fixes de $f \circ f$ sont les solutions de $f \circ f(x) = x$.
  Or $f \circ f(x) = f(f(x)) = 3 + \dfrac{2}{3 + \frac{2}{x}} = 3 + \dfrac{2x}{3x+2} = \dfrac{11x+6}{3x+2}$.

$$f \circ f(x) = x \iff \frac{11x+6}{3x+2} = x \iff 11x + 6 = 3x^2 + 2x$$

$$f \circ f(x) = x \iff 3x^2 - 9x - 6 = 0 \iff x^2 - 3x - 2 = 0$$

  On trouve 2 solutions : $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \notin I$ et $\ell = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \simeq 3.56$ unique point fixe dans I.

- Nous avons donc forcément : $\ell_1 = \ell_2 = \ell$.

  Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \ell \implies \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.

Exercice 6 :

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes. Sinon, justifier pourquoi il n'y a pas de limite.

1. $z_n = \dfrac{2ni - 5n^2 + 3i}{7n - n^2 i + 4}$.
2. $z_n = \left(\dfrac{3+3i}{7}\right)^n$.

Correction :

1. $z_n = \dfrac{2ni - 5n^2 + 3i}{7n - n^2 i + 4} = \dfrac{-5n^2 + i(2n+3)}{7n + 4 - n^2 i} = \dfrac{\left(-5n^2 + i(2n+3)\right)\left(7n + 4 + n^2 i\right)}{(7n+4)^2 + \left(n^2\right)^2}$

$$z_n = \frac{-35n^3 - 20n^2 - 5n^4 i + i\left(14n^2 + 21n + 8n + 12\right) - \left(2n^3 - 3n^2\right)}{(7n+4)^2 + \left(n^2\right)^2}$$

$$z_n = \frac{-37n^3 - 17n^2 + i\left(-5n^4 + 14n^2 + 29n + 12\right)}{n^4 + 49n^2 + 56n + 16}$$

$$Re(z_n) = \frac{-37n^3 - 17n^2}{n^4 + 49n^2 + 56n + 16} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{-37n^3}{n^4} = 0.$$

$$Im(z_n) = \frac{-5n^4 + 14n^2 + 29n + 12}{n^4 + 49n^2 + 56n + 16} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{-5n^4}{n^4} = -5.$$

Finalement, et $\lim_{n \to +\infty} z_n = 0 - 5i = -5i.$

<u>**Autre méthode :**</u>

$$z_n = \frac{2ni - 5n^2 + 3i}{7n - n^2 i + 4} = \frac{n^2\left(\frac{2i}{n} - 5 + \frac{3i}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{7}{n} - i + \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{\frac{2i}{n} - 5 + \frac{3i}{n^2}}{\frac{7}{n} - i + \frac{4}{n^2}}$$

Ensuite : $\lim_{n \to +\infty} \frac{2i}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3i}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{7}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{-4}{n^2} = 0$

car leurs modules $\left|\frac{2i}{n}\right| = \frac{2}{n}$; $\left|\frac{3i}{n^2}\right| = \frac{3}{n^2}$; $\left|\frac{7}{n}\right| = \frac{7}{n}$; $\left|\frac{-4}{n^2}\right| = \frac{4}{n^2}$ ont tous pour limite 0.

Conclusion : $\lim_{n \to +\infty} z_n = \frac{-5}{-i} = -5i.$

2. $z_n = \left(\frac{3+3i}{7}\right)^n = a^n$, avec $a = \frac{3+3i}{7}$ et $|a| = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{7} \simeq 0.6$

$|z_n| = |a^n| = |a|^n$ suite géométrique de raison $|a| < 1$. On en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} |z_n| = 0 \implies \lim_{n \to +\infty} z_n = 0.$$