Analyse 2 : DS2 2021/2022

Correction du DS2 d'Analyse 2 de 2021/2022 par Mathis S.

La plupart des résultats ont été vérifiés par l'outil informatique, mais si vous constatez une erreur, merci de me contacter.

[DS2 2021 2022 Analyse2-DS PREING1 S2 | Δhmed CyCours (deltahmed.fr)]

Exercice 1 :

1.

$$\sqrt{n^4+1}-n^2 = n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1\right)$$

Or, avec $X \to 0, \left(\sqrt{1+X}-1\right) \sim \frac{X}{2}$, donc $\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1\right) \sim \frac{1}{2n^4}$

Ainsi $\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right) \sim \frac{1}{2n^2}$

Aussi, avec $X \to 0, (e^X-1) \sim X$, donc $\left(\exp\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)-1\right) \sim \frac{(-1)^n}{n}$

Par quotient,

$$u_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}$$

2.

$\ln(1+\sin(x)) \sim_{x\to 0} \sin(x) \sim_{x\to 0} x$

$\sin(\pi x^2) \sim_0 \pi x^2$

$$f(x) \sim_{x\to 0} \frac{1}{\pi x}$$

3.

$$g(x) = \frac{\sin(x)\,(\cos(x)-1)}{(x^4+x^5)(\cos(\pi x))}$$

$\sin(x) \sim_0 x$

$$\cos(x)-1 \sim_0 \left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$(x^4+x^5) \sim_0 x^4$

$\cos(\pi x) \sim_0 1$

$$g(x) \sim_0 x\left(-\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{x^4}\right) = -\frac{1}{2x}$$

$$g(x) \sim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{2x}\right)$$

<u>Exercice 2 :</u>

1.a.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 + o(x^2) = 1 - x + o(x^2)$$

$$\frac{\sqrt{1+x}}{1+x+x^2} = \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)(1-x) + o(x^2) = 1 - x + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

$$g_1(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{5x^2}{8} + o(x^2)$$

1.b.

$$f(x) = -\frac{5x^2}{8} + o(x^2)$$

$$f(x) \sim_{x\to 0} -\frac{5x^2}{8}$$

2.

$$g_2(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$$

On pose $X = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$

$$e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{1+X} = e(e^X) = e\left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right)$$

$$g_2(x) = e\left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2\right) + o(x^2)$$

$$g_2(x) = e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8}\right) + o(x^2)$$

$$g_2(x) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$$

3.

Faire un DL de $g_3(x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ revient à faire un DL de $g_3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ en 0.

$$g_3\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = e^{x+\frac{\pi}{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$g_3\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2)$$

$$g_3\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{2} + x + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2)$$

$$g_3\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}x + o(x^2)$$

$$g_3(x) = e^{\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right)$$

<u>Exercice 3 :</u>

1.

$$\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n^4}$$

$$n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0, \text{donc} \sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \sim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

$$\frac{n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right)}{\sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)} \sim -\frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right)}{\sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)} = 0$$

2.

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sim \frac{\pi}{n}$$

$$\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$$

$$\ln\left(1+\frac{3}{n}\right) \sim \frac{3}{n}$$

$$\frac{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)} \sim \frac{2\pi}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{2\pi}{3}$$

3.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$3\sin(x) - x\cos(x) - 2x = 3x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{40} - x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} - 2x + o(x^5)$$

$$3\sin(x) - x\cos(x) - 2x = x^5\left(\frac{1}{40} - \frac{1}{24}\right) = -\frac{x^5}{60} + o(x^5) = x^5\left(-\frac{1}{60} + o(1)\right)$$

$$\pi x^5 + x^6 = x^5(\pi + x)$$

$$\frac{3\sin(x) - x\cos(x) - 2x}{\pi x^5 + x^6} = \frac{-\frac{1}{60} + o(1)}{\pi + x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin(x) - x\cos(x) - 2x}{\pi x^5 + x^6} = -\frac{1}{60\pi}$$

4.

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 2x - 2x^2 + o(x^2)$$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$$

$$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$1 + \ln(1+2x) - e^{2x} = -4x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{1+\ln(1+2x)-e^{2x}}{1-\cos(x)}=\frac{-4x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\frac{-4+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\ln(1+2x)-e^{2x}}{1-\cos(x)}=-8$$

Exercice 4 :

1.

$$f(x)=\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{v}\right)^3}{\frac{1}{v}+1}}=\sqrt{\frac{1}{v^2+v^3}}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{v^2(1+v)}}$$

$$f(x)=\frac{1}{v}\sqrt{\frac{1}{1+v}}$$

$$f(x)=\frac{1}{v}\sqrt{1-v+v^2+o_{v\to 0}(v^2)}$$

Soit $u=-v+v^2+o_{v\to 0}(v^2)$

$$\sqrt{1+u}=1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o_{u\to 0}(u^2)$$

$$\sqrt{1-v+v^2+o_{v\to 0}(v^2)}=1+\frac{1}{2}(-v+v^2)-\frac{1}{8}(-v+v^2)^2+o_{v\to 0}(v^2)$$

$$\sqrt{1-v+v^2+o_{v\to 0}(v^2)}=1-\frac{v}{2}+\frac{3}{8}v^2+o_{v\to 0}(v^2)$$

$$f(x)=\frac{1}{v}-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}v+o_{v\to 0}(v)$$

$$f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+o_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

2.

Une asymptote oblique de C_f en $+\infty$ est de forme :

$$y=x-\frac{1}{2}$$

3.

$$f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{3}{8x} > 0$$

Donc C_f est au-dessus de l'asymptote oblique.