Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 4 + \frac{3}{x+3}.$$

1. Déterminer (2 points)

$$f([-4,-3[\cup]-3,-1]), \quad f^{-1}([4,5]) \quad \text{et} \quad f^{-1}(\{4\})$$

2. L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ? (1.5 points)
3. Déterminer des ensembles E et F tels que f soit une bijection de E sur F. (0.5 points)
4. Déterminer la réciproque de f sur ces ensembles. (1.0 points)

Solution :

1. Nous avons

$$\begin{array}{rcl} f([-4,-3[\cup]-3,-1]) & = &]-\infty,1] \cup \left[\frac{11}{2}, +\infty\right[\\ f^{-1}([4,5]) & = & [0,+\infty[\\ f^{-1}(\{4\}) & = & \emptyset \end{array}$$

2. • **Injective :** Nous avons

$$f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad 4 + \frac{3}{x+3} = 4 + \frac{3}{y+3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{x+3} = \frac{3}{y+3} \quad \Longrightarrow \quad y+3 = x+3 \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

   • **Surjective :** Non, car 4 n'a pas des antécédents.
3. $E = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ et $F = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
4. Pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ nous avons

$$y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y = 4 + \frac{3}{x+3} \quad \Longleftrightarrow \quad x+3 = \frac{3}{y-4} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{3}{y-4} - 3.$$

   Ceci implique que

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{-3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{4\} \\ x & \longmapsto & \frac{3}{x-4} - 3 \end{array}$$

Exercice 2. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective. (1 point)
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective. (1 point)
3. En déduire que si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective. (1 point)

Solution :

1. Soient $x, y \in E$. Supposons $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Nous voulons montrer que : $x = y$. Or

$$g(f(x)) = g(f(y)) \underbrace{\Longrightarrow}_{g \text{ injective}} f(x) = f(y) \underbrace{\Longrightarrow}_{f \text{ injective}} x = y.$$

2. Soit $y \in G$. Nous voulons montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x)$. Or g est surjective, donc il exist $t \in F$ tel que $y = g(t)$. Mais f est aussi surjective, donc : $t = f(x)$ pour un certain $x \in E$. Finalement, comme voulu :

$$y = g(t) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

3. Si f est bijective, alors f est injective et surjective. Le même peut être dit pour g. La proposition est donc une conséquence directe des points 1 et 2.

Exercice 3. Soit

$$u = 1 + i \quad \text{et} \quad v = -1 + i\sqrt{3}$$

1. Déterminer les modules de u et v. (0.5 points)
2. Déterminer un argument de u et un argument de v. (1 point)
3. En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de u. (1.5 points)
4. Déterminer le module et un argument de $\frac{u}{v}$. (1 point)
5. En déduire les valeurs de (1 point)

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$$

Solution :

1. $|u| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $|v| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$.
2. Nous avons

$$u = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Donc un argument de u est $\frac{\pi}{4}$.

$$v = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Donc un argument de v est $\frac{2\pi}{3}$.

3. On cherche les solutions complexes de $z^3 = u$. En écrivant z sous forme trigonometrique $z = re^{i\theta}$ on obtient

$$\begin{aligned} z^3 = u \iff r^3e^{3i\theta} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} &\iff r^3 = \sqrt{2} \ \text{ et } \ 3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff r = 2^{\frac{1}{6}} \ \text{ et } \ \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \ k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Les racines cubiques de u sont donc

$$\zeta_0 = 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i\pi}{12}} \quad ; \quad \zeta_1 = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3i\pi}{4}} \quad ; \quad \zeta_2 = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17i\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}}e^{-\frac{7i\pi}{12}}$$

4. Nous avons

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-5i\pi}{12}}.$$

Donc $|\frac{u}{v}| = \sqrt{2}/2$ et un argument de $\frac{u}{v} = -\frac{5\pi}{12}$.

5. D'après la question précédente, nous avons

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

De même

$$\frac{u}{v} = \frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(-1+i\sqrt{3})}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} + i\frac{(-1-\sqrt{3})}{4}.$$

L'unicité de la forme algébrique de $\frac{u}{v}$ permet d'en déduire par identification :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \quad &\Longrightarrow \quad \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \quad &\Longrightarrow \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante (3 points)

$$4(1+i)z^2 + z(4+8i) - 3 - 5i = 0.$$

Solution : Nous avons

$$\Delta = (4+8i)^2 - 16(1+i)(-3-5i) = -48 + 64i - (32 - 128i) = -80 + 192i = 16(-5+12i)$$

Maintenant, pour trouver les racines carrées de $-5+12i$ on compute

$$z^2 = -5+12i \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & \sqrt{(5)^2+(-12)^2} \\ x^2-y^2 & = & -5 \\ 2xy & = & 12 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 13 \\ x^2-y^2 & = & -5 \\ xy & = & 6 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & 4 \\ y^2 & = & 9 \\ xy & = & 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2 \\ y & = & -3 \end{array}\right.$$

Ainsi, les racines carées de $16(-5+12i)$ sont $\pm 4(2+3i)$ (2 points). D'où on conclut que les solutions de l'equation sont (1 point)

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{-(4+8i)+4(2+3i)}{8(1+i)} = \frac{4(1+i)}{8(1+i)} = \frac{1}{2} \\ \zeta_2 &= \frac{-(4+8i)-4(2+3i)}{8(1+i)} = \frac{-(3+5i)}{2(1+i)} = \frac{-(3+5i)(2-2i)}{8} = \frac{-16-4i}{8} = -2 - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Exercice 5. Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E en posant pour tout $x,\ x' \in E$:

$$x\mathscr{R}x' \iff f(x) = f(x').$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. (1 point)
2. Pour tout $x \in E$, décrire la classe d'équivalence $[x]$ de x. (1 point)
3. Notons par $E/\mathscr{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathscr{R}$ (c.-à-d. $E/\mathscr{R} = \{[x] : x \in E\}$). Sur $E/\mathscr{R}$ on définit l'application $[f]$ par
$$[x] \longmapsto f(x).$$
   (a) Montrer que $[f]$ est injective. (0.5 points)
   (b) Montrer $\mathrm{Im}([f]) = \mathrm{Im}(f)$. (1 point)
   (c) En déduire qu'il existe une bijection de $E/\mathscr{R}$ dans l'image de f. (0.5 points)

Solution :

1. • **Réflexive** : Soit $x \in E$. Alors $f(x) = f(x)$, donc $x\mathscr{R}x$.
   • **Symetrique** : Soit $x, y \in E$. Supposons $x\mathscr{R}y$, alors
$$f(x) = f(y) \implies f(y) = f(x) \implies y\mathscr{R}x.$$
   • **Transitive** : Soit $x, y, z \in E$. Supposons $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$, alors
$$f(x) = f(y) \text{ et } f(y) = f(z) \implies f(x) = f(z) \implies x\mathscr{R}z.$$
2. Soit $x \in E$. Alors
$$\begin{aligned} [x] &= \{y \in E : \ x\mathscr{R}y\} \\ &= \{y \in E : \ f(x) = f(y)\} \\ &= f^{-1}(\{f(x)\}). \end{aligned}$$
3. (a) Soit $[x], [y] \in E/\mathscr{R}$. Supposons, $[f][x] = [f][y]$, alors
$$[f][x] = [f][y] \implies f(x) = f(y) \implies y \in [x] \implies [x] = [y].$$

(b) Nous avons

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = f\left(\bigcup_{x\in E}[x]\right) = \bigcup_{x\in E} f([x]) = \bigcup_{x\in E}\{[f][x]\} = \{[f][x] : [x] \in E \setminus \mathscr{R}\} = \mathrm{Im}([f]).$$

(c) Puisque $[f]$ est injective et toute fonction est surjective sur son image, on conclut que

$$[f] : E \setminus \mathscr{R} \longrightarrow \mathrm{Im}([f]) = \mathrm{Im}(f),$$

définit une bijection.