| | | |
|---|---|---|
| CY TECH | **Cycle préparatoire 1ère année**<br>**Contrôle continu    PréIng 1** | |
| | *Matière* : **Mathématiques - Analyse** | *Date* : **Jeudi 20 mai 2021** |
| | **Appareils électroniques et documents interdits** | *Durée* : **1 h 30** |
| | | *Nombre de pages* : **2** |

**Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.**

*L'ordre dans lequel les exercices sont traités n'est pas imposé.*

## Exercice 1 : -

1. Déterminer un équivalent simple de la suite : $u_n = \dfrac{\ln(n^3+n)}{n+4}$.
2. Déterminer un équivalent simple de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x}}$, au voisinage de $a = 1$.
3. Montrer la relation d'équivalence suivante au voisinage de 0 : $\dfrac{(x+1)^x}{e} \underset{0}{\sim} x^x$

## Exercice 2 : -

Calculer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $g_1(x) = \ln(1+2x)\sqrt[3]{1-x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. $g_2(x) = \dfrac{\sqrt{\cos(x)}}{1-3x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
3. $g_3(x) = x e^x$ à l'ordre 3 au voisinage de 1.

## Exercice 3 : -

On considère la fonction $f$, définie sur $I = ]-1, +\infty[$, par :

$$f(x) = x + \ln(1+x).$$

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $I$ vers $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le $DL_2(0)$ de $f$, et montrer que $f^{-1}$, réciproque de $f$, possède également un $DL_2(0)$.

3. Le $DL_2(0)$ de $f^{-1}$ sera noté : $f^{-1}(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$.
   Justifier que l'on a forcément : $a_0 = 0$.
4. A l'aide de l'égalité : $f \circ f^{-1}(x) = x$ et de l'unicité des $DL$ montrer que $a_1 = \dfrac{1}{2}$ et $a_2 = \dfrac{1}{16}$.
5. En déduire l'équation de la tangente à $f^{-1}$ en 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

## Exercice 4 : -

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}\, dx$.
2. $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x^2-1}{x+3}\, dx$.
   ***Indication :*** Penser à une décomposition en éléments simples.
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 -6x e^{3x^2}\, dx$.