Proposition DS 6

1. Exercice 1 :

Déterminer un équivalent simple des suites ou des fonctions suivantes :

1. Déterminer un équivalent simple de la suite : $u_n = \dfrac{\ln(n^3+n)}{n+4}$.
2. Déterminer un équivalent simple de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x}}$, au voisinage de $a = 1$.
3. Montrer la relation d'équivalence suivante au voisinage de 0 :

$$\frac{(x+1)^x}{e} \underset{0}{\sim} x^x$$

Correction :

1. $\ln\left(n^3+n\right) = \ln\left(n^3\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \ln\left(n^3\right) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = 3\ln(n) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$

$$\Longrightarrow u_n = \frac{\ln(n^3+n)}{n+4} \sim \frac{3\ln(n)}{n}$$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x} = 1 \Longrightarrow \sqrt{x} \underset{1}{\sim} 1.$

Si on pose $x = 1+h$, on peut écrire :

$$\sin(\pi x) = \sin(\pi(1+h)) = \sin(\pi+\pi h) = -\sin(\pi h) \underset{0}{\sim} -\pi h.$$

Finalement :

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x}} \underset{1}{\sim} -\pi(x-1)$$

3. <u>Il y avait encore une erreur dans l'énoncé</u> : l'équivalent devait être demandé en $+\infty$ et non pas en 0.

$$\frac{\frac{(x+1)^x}{e}}{x^x} = \frac{(x+1)^x}{ex^x} = \frac{e^{x\ln(1+x)}}{e^{1+x\ln(x)}} = \frac{e^{x\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}}{e^{1+x\ln(x)}} = \frac{e^{x\ln(x)+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{e^{1+x\ln(x)}} = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}$$

Or : $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-1 \underset{+\infty}{=} x\left(\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)-1 \underset{+\infty}{=} o(1) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-1 = 0$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(x+1)^x}{e}}{x^x} = 1.$$

D'où le résultat :

$$\frac{(x+1)^x}{e} \underset{+\infty}{\sim} x^x$$

Au voisinage de 0**, on pourrait dire :** $\frac{(x+1)^x}{x^x} = \frac{e^{x\ln(1+x)}}{e^{x\ln(x)}}$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1+x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \implies \lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)^x}{x^x} = 1 \implies (x+1)^x \underset{0}{\sim} x^x.$$

2. Exercice 2 :

Calculer les développements limités suivants :

1. $g_1(x) = \ln(1+2x)\sqrt[3]{1-x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. $g_2(x) = \frac{\sqrt{\cos(x)}}{1-3x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
3. $g_3(x) = xe^x$ à l'ordre 3 au voisinage de 1.

Correction :

1. $\sqrt[3]{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{3}} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{3}(-x) - \frac{1}{9}(-x)^2 + o(x^2) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2).$

$$\ln(1+2x) \underset{0}{=} (2x) - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) \underset{0}{=} 2x - 2x^2 + o(x^2).$$

$$g_1(x) = \ln(1+2x)\sqrt[3]{1-x} \underset{0}{=} \left(2x - 2x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$g_1(x) \underset{0}{=} 2x - \frac{8}{3}x^2 + o(x^2).$$

2.

$$\begin{cases} \cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2). \\ \sqrt{1+u} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2). \end{cases} \implies \sqrt{\cos(x)} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) \; .$$

$$\frac{1}{1-u} \underset{0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2) \implies \frac{1}{1-3x} \underset{0}{=} 1 + 3x + 9x^2 + o(x^2).$$

$$\frac{\sqrt{\cos(x)}}{1-3x} \underset{0}{=} \left(1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 + 3x + 9x^2 + o(x^2)\right)$$

$$g_2(x) \underset{0}{=} 1 + 3x + \frac{35}{4}x^2 + o(x^2).$$

3. Au voisinage de 1, on fait le changement de variable : $x = 1 + h \iff h = x - 1$.

$$g_3(x) = xe^x = (1+h)e^{1+h} = (1+h)e^1e^h = f_3(h)$$

$$f_3(h) \underset{0}{=} e(1+h)\left(1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+o\left(h^3\right)\right)$$
$$f_3(h) \underset{0}{=} e\left(1+2h+\frac{3h^2}{2}+\frac{2h^3}{3}+o\left(h^3\right)\right)$$
$$g_3(x) \underset{1}{=} e\left(1+2(x-1)+\frac{3(x-1)^2}{2}+\frac{2(x-1)^3}{3}+o\left((x-1)^3\right)\right)$$
$$g_3(x) \underset{1}{=} e+2e(x-1)+\frac{3e(x-1)^2}{2}+\frac{2e(x-1)^3}{3}+o\left((x-1)^3\right)$$

3. Exercice 3 :

On considère la fonction f, définie sur $I =]-1, +\infty[$, par :

$$f(x) = x + \ln(1+x).$$

1. Montrer que f réalise une bijection de I vers $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le $DL_2(0)$ de f, et montrer que f^{-1}, réciproque de f, possède également un $DL_2(0)$.
3. Le $DL_2(0)$ de f^{-1} sera noté : $f^{-1}(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$.

   Justifier que l'on a forcément : $a_0 = 0$.
4. A l'aide de légalité : $f \circ f^{-1}(x) = x$ et de l'unicité des DL montrer que $a_1 = \frac{1}{2}$ et $a_2 = \frac{1}{16}$.
5. En déduire l'équation de la tangente à f^{-1} en 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Correction :

1. $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$ est définie et dérivable sur I et $f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} > 0$.

f est strictement croissante sur I. Elle réalise donc une bijection de I vers $f(I)$.

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \implies f(I) = \mathbb{R}$.

2. f est de classe C^∞ sur I, elle possède donc des $DL_n(0)$ à tout ordre. En particulier.

$$f(x) = x + \ln(1+x) \underset{0}{=} x + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{0}{=} 2x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

f' ne s'annule pas sur I, donc f^{-1} est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Elle possède donc des $DL_n(0)$ à tout ordre.

3. $f^{-1}(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$ et $f(0) = 0 \implies f^{-1}(0) = 0$ et donc : $a_0 = 0$.

Le $DL_2(0)$ de f^{-1} s'écrit donc :

$$f^{-1}(x) \underset{0}{=} a_1x + a_2x^2 + o(x^2).$$

4. On sait que : $f^{-1}(x) \underset{0}{=} a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$ que $f(x) \underset{0}{=} 2x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

On en déduit, puisque $f \circ f^{-1}(x) = x$, que :

$$2(a_1x + a_2x^2) - \frac{1}{2}(a_1x + a_2x^2)^2 + o(x^2) \underset{0}{=} x + o(x^2)$$

$$\iff 2a_1x + 2a_2x^2 - \frac{a_1^2x^2}{2} + o(x^2) \underset{0}{=} x + o(x^2)$$

$$\iff 2a_1x + \left(2a_2 - \frac{a_1^2}{2}\right)x^2 + o(x^2) \underset{0}{=} x + o(x^2)$$

L'unicité des DL implique : $\begin{cases} 2a_1 = 1 \\ 2a_2 - \dfrac{a_1^2}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_2 = \dfrac{a_1^2}{4} = \dfrac{1}{16} \end{cases}.$

5. On a établi que : $f^{-1}(x) \underset{0}{=} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{16}x^2 + o(x^2)$.

On en déduit que la tangente en 0 de f^{-1} a pour équation : $y = \dfrac{1}{2}x$.

La position de la courbe est déterminée par le signe du terme : $\dfrac{1}{16}x^2 \geqslant 0$.

Donc la courbe est au dessus de cette tangente au voisinage de 0.

4. Exercice 4 :

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}\,dx$.
2. $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x^2-1}{x+3}\,dx$.

   Indication : Penser à une décomposition en éléments simples.
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 -6xe^{3x^2}\,dx$.

Correction :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}\,dx = \int_0^1 \frac{u'}{2\sqrt{u}}\,dx = \Big[\sqrt{u}\Big]_0^1 = \Big[\sqrt{x^3+1}\Big]_0^1 = \sqrt{2}-1.$

2. $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x^2-1}{x+3}\,dx = \int_{-1}^2 \left(x-3+\frac{8}{x+3}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}-3x+8\ln|x+3|\right]_{-1}^2 = -\frac{3}{2}+8\ln\left(\frac{5}{2}\right).$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 -6xe^{3x^2}\,dx = \int_0^1 -u'e^u\,dx = \Big[-e^u\Big]_0^1 = \Big[-e^{3x^2}\Big]_0^1 = 1-e^3.$