CY TECH	**Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ année** **Devoir surveillé 5** *N.Arancibia, M. Bahtiti, K. Guezguez, A. Hajej, B.Laquerriere, J-M Masereel*	
	Matière : **Algèbre**	*Date* : **Mercredi 29 avril 2021**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **1 h 30 min**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1. [2.5 points]

1. Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}$ et $A = (a_1, \ldots, a_n)$ une famille d'éléments de E. Quand dit-on que la famille A est libre ?
2. Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces de E. Quand dit-on que F et G sont en somme directe dans E ?
3. Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie. Enoncer le théorème du rang et montrer que si $\dim(E) = \dim(F)$, l'injectivité de f équivaut à la surjectivité de f.

Exercice 2. [3 points]

On rappelle que $R_3[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

1. Donner une base et la dimension de $R_3[X]$.
2. Montrer que la famille $B = (X^3+1, X^3-1, X^2+X, X^2-X)$ est une base de $R_3[X]$.
3. Calculer les coordonnées du polynôme X^3+2X+1 dans la base B.

Exercice 3. [7 points]

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - t = 0 \text{ et } 2y + z + t = 0\}$$

1. Déterminer une base et la dimension de E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de R^4 engendré par

$$u_1 = (1, -2, 1, 1),\ u_2 = (2, 1, -1, 1) \text{ et } u_3 = (0, 5, -3, -1).$$

   Déterminer une base et la dimension de F.
3. Déterminer un système d'équations de F.
4. Déterminer une base et la dimension de $E \cap F$.
5. Déduire de ce qui précède la dimension de $E + F$.
6. Déterminer une base de $E + F$.