CY TECH	**Cycle préparatoire 1ère année** **Devoir surveillé 5** *Karam Fayad, Khaoula Guezguez, Jean-Michel Masereel*	
	Matière : **Algèbre**	*Date* : **Vendredi 24 avril 2020**
		Durée : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte six exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (6 points)
On munit $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne notée $\oplus$ et définie de la manière suivante :

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + 6x_1x_2).$$

D'autre part, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$\lambda \otimes (x, y) = (\lambda x, \lambda y + 3(\lambda^2 - \lambda)x^2).$$

$(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? Justifier votre réponse.

Exercice 2. (5 points)
On considère l'ensemble

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = P(2) = 0\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Trouver une base et la dimension de E.
3. Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = E \oplus \text{vect}(1 + X, X^2)$.

Exercice 3. (5 points)

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u = (4, 3, -2), \quad v = (0, 1, 6), \quad w = (2, 2, 2), \quad t = (-1, 0, 5).$$

   (a) La famille (u, v, w, t) est-elle libre ? Justifier.

   (b) La famille (u, v, w, t) engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$? Justifier.

2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère les polynômes

$$P = -2 + X + 2X^2, \quad Q = -1 - 4X - 2X^2, \quad R = 1 - X - 3X^2.$$

   (a) Montrer que la famille (P, Q, R) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Trouver les coordonnées du polynôme $1 + X + X^2$ dans la base (P, Q, R).

Exercice 4. (4 points)
Soit E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ donnés par :

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ y + z + t = x + 2y + t = 0\},$$

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ y - z = -y + 3z + t = 0\}.$$

Déterminer, en justifiant rigoureusement, la dimension de $E + F$.

Exercice 5. (6 points)
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs

$$u = (1, 1, 5), \quad v = (4, 1, 8), \quad w = (-1, 3, 11).$$

1. Les vecteurs u, v et w sont-ils linéairement indépendants ? Justifier.
2. Trouver la dimension de $\mathrm{vect}(u, v, w)$.
3. Soit $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 4y - z = 0\}$.
   (a) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que $W = \mathrm{vect}(u, v, w)$.
   (c) Donner deux bases différentes de W.
   (d) Donner un supplémentaire de W dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. (4 points)
Dans chacun des cas suivants, dire si l'ensemble donné est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu. Si oui, en donner une base et la dimension.

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = -1\}$
2. $F = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a x \sin(x) + b x,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
3. $G = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(0) = 3\}$