Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ année

Devoir surveillé 2

Karam Fayad, Khaoula Guezguez, Jean-Michel Masereel, Richard Nuadi

Matière : **Algèbre**	*Date* : **Vendredi 6 décembre 2019**
Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
	Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (3 points)
On considère :
- trois ensembles non vides E, F et G
- deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$
- une partie B de F

Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies (c.-à-d. vraies dans le cas général) et lesquelles sont fausses ? Justifier en donnant une preuve si la proposition est vraie et un contre-exemple si elle est fausse.

1. $g \circ f$ est injective $\Rightarrow$ g est injective.
2. $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow$ g est surjective.
3. $B = f(f^{-1}(B))$.

Exercice 2. (3 points)
On désigne par $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction partie entière. Déterminer, en justifiant, les ensembles suivants :

1. $E(\mathbb{R})$
2. $E(\mathbb{Q})$
3. $E^{-1}([-\sqrt{2}, \sqrt{2}])$
4. $E^{-1}(\{r\})$ où r est un réel donné.

Exercice 3. (6 points)

1. Sans utiliser la forme exponentielle :
   (a) Trouver, sous forme algébrique, les racines carrées de $2+2i\sqrt{3}$.
   (b) Trouver, sous forme algébrique, les solutions de l'équation $z^4 = 2+2i\sqrt{3}$.
2. En utilisant la forme exponentielle, trouver les racines quatrièmes de $2+2i\sqrt{3}$.
3. En déduire que
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{a} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{a}$$
où a est un réel qu'on déterminera.

Exercice 4. (5 points)
Soit $z_0 = e^{i\theta_0}$ un nombre complexe avec $\theta_0 \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{n+1} = \frac{|z_n| + z_n}{2}.$$

On écrit sous forme exponentielle $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ avec $r_n = |z_n|$ et $\theta_n \in]-\pi, \pi]$.

1. Montrer que $z_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{i\theta_n/2}$.
2. Exprimer r_{n+1} et θ_{n+1} en fonction de r_n et θ_n, puis préciser la nature de la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$r_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).$$

4. On pose $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$, où Im désigne la partie imaginaire. Montrer que $y_{n+1} = \frac{y_n}{2}$.
5. En déduire que pour $n \geq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta_0)}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}.$$

Exercice 5. (6 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \min(x^2, x^3) \end{array}$$

1. Tracer dans le même repère, avec deux couleurs différentes, l'allure du graphe des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$. En déduire l'allure du graphe de f.
2. Montrer que f est bijective.
   On ne se contentera pas d'une interprétation graphique.
3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array}$$

   (a) Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.
   (b) Que peut-on en déduire ?