EISTI	**Cycle préparatoire 1ère année** **Devoir surveillé 5** *Karam Fayad, Khaoula Guezguez, Jean-Michel Masereel*	
	Matière : **Algèbre**	*Date* : **Vendredi 5 avril 2019**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (7.5 points)
Soit $V = \{(4a, 2a, a, b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + z = y + t\}$.

1. Montrer que V et W sont des espaces vectoriels.
2. Donner une base et la dimension de V, W et $V \cap W$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^4 = V + W$.

Exercice 2. (6 points)
Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on note $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = P'(1) = 0\}$, et on note $F = \mathbb{R}_1[X]$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que G est de dimension 2 et que la famille $((X-1)^2, (X-1)^3)$ en est une base.
3. Montrer que la famille $(1, X-1)$ est une base de F.
4. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.
5. Soit le vecteur $P = 1 + X + X^2 + X^3$.
   (a) Calculer les coordonnées de P dans la base $(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) En déduire la décomposition de P sur $F + G$.

Exercice 3. (3 points)
En justifiant vos choix, donner dans chacun des cas suivants deux familles de vecteurs $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ dans $\mathbb{R}^3$ telles que :

1. $\mathrm{vect}(\mathscr{F})$ et $\mathrm{vect}(\mathscr{F}')$ sont en somme directe et ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\mathrm{vect}(\mathscr{F}) + \mathrm{vect}(\mathscr{F}') = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{vect}(\mathscr{F})$ et $\mathrm{vect}(\mathscr{F}')$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\mathrm{vect}(\mathscr{F})$ et $\mathrm{vect}(\mathscr{F}')$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. (6 points)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E, de dimension finie. On propose de montrer la formule suivante, dite *formule de Grassmann* :

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G).$$

1. ***Cas particulier*** *: on suppose dans cette question que F et G sont en somme directe.*
   Soit $m=\dim(F)$ et $n=\dim(G)$. On note $(u_1,\cdots,u_m)$ une base de F et $(v_1,\cdots,v_n)$ une base de G.
   (a) Montrer que la famille $(u_1,\cdots,u_m,v_1,\cdots,v_n)$ est une base de $F\oplus G$.
   (b) En déduire la dimension de $F\oplus G$ et la formule de Grassmann dans ce cas.
2. ***Cas général :***
   $F\cap G$ étant un sous-espace vectoriel de F, on note H un supplémentaire de $F\cap G$ dans F.
   (a) Donner la relation entre $\dim(F)$, $\dim(H)$ et $\dim(F\cap G)$.
   (b) Justifier que G et H sont des sous-espaces vectoriels de $F+G$.
   (c) Montrer que G et H sont en somme directe.
   (d) Montrer que $F+G=G+H$.
   (e) En déduire que G et H sont supplémentaires dans $F+G$.
   (f) Conclure.