	Cycle préparatoire 1ère année **Devoir surveillé 2** *Karam Fayad, Khaoula Guezguez, Jean-Michel Masereel*	
	Matière : **Algèbre**	*Date* : **Vendredi 16 novembre 2018**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (2 points)
Déterminer le reste de la division euclidienne de 100^{2018} par 17.

Exercice 2. (2 points)
Soit $E_1 = \{\text{garçon}, \text{fille}\}$, $E_2 = \{\text{lune}, \text{soleil}\}$ et $E_3 = \{\text{chaise}, \text{table}, \text{armoire}\}$. Dans chacun des cas suivants, donner deux ensembles distincts E_i et E_j parmi E_1, E_2 et E_3, et construire une application $f : E_i \longrightarrow E_j$ qui soit :

1. injective et non surjective.
2. surjective et non injective.
3. ni injective, ni surjective.
4. bijective.

Exercice 3. (4.5 points)
Soit f l'application définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (m,n) & \longmapsto & f(m,n) = \dfrac{m}{n} \end{array}$$

1. L'application f est-elle injective ? Répondre en justifiant.
2. L'application f est-elle surjective ? Répondre en justifiant.
3. Déterminer l'image $f(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$.
4. (a) Déterminer $f^{-1}(\{1\})$.
   (b) Soit $q \in \mathbb{Z}$. Déterminer $f^{-1}(\{q\})$.
   (c) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{Z})$.

Exercice 4. (5 points)
Soit E et F deux ensembles non vides, E_1 un sous-ensemble non vide de E tel que $E_1 \neq E$, et F_1 un sous-ensemble non vide de F tel que $F_1 \neq F$.
On note $E_2 = E \setminus E_1$ et $F_2 = F \setminus F_1$. Soit $f_1 : E_1 \longrightarrow F_1$ et $f_2 : E_2 \longrightarrow F_2$ deux applications.
On définit alors l'application

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in E_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in E_2 \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que si $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, alors $f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si f_1 et f_2 sont injectives.
3. Montrer que f est surjective si et seulement si f_1 et f_2 sont surjectives.

Exercice 5. (6.5 points)

1. On considère sur $\mathbb{R}^2$ la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall\, (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4,\ \ (x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que l'ordre $\mathcal{R}$ est partiel.
   (c) Représenter graphiquement, en justifiant, l'ensemble des majorants de $(1, 1)$ pour l'ordre $\mathcal{R}$.

2. On considère sur $\mathbb{R}^2$ la relation binaire $\mathcal{S}$ définie par :

$$\forall\, (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4,\ \ (x, y)\mathcal{S}(x', y') \Leftrightarrow x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y').$$

   (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que l'ordre $\mathcal{S}$ est total.
   (c) Représenter graphiquement, en justifiant, l'ensemble des majorants de $(1, 1)$ pour l'ordre $\mathcal{S}$.