Correction DS2-Algèbre-2018

Exercice 1
$100 = 5 \times 17 + 15$, donc $100^{2018} \equiv 15^{2018}[17]$. Cherchons un entier k tel que $15^k \equiv 1[17]$.

$$15 \equiv (-2)[17] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 15^4 \equiv (-2)^4[17] \\ (-2)^4 = 16 \equiv (-1)[17] \end{array} \right. \Rightarrow 15^8 \equiv (-1)^2[17]$$

On peut prendre $k = 8$. Effectuons la division euclidienne de 2018 par 8, on obteint $2018 = 252 \times 8 + 2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 100^{2018} \equiv 15^{2018}[17] \\ 15^{2018} = 15^{252\times 8}15^2 \\ 15^8 \equiv 1[17] \end{array} \right. \Rightarrow 100^{2018} \equiv 15^2[17]$$

Le reste de la dévion euclidienne est alors égale à 4.
Exercice 2

1/Application injective et non surjective

$$\begin{array}{cccc} f & : & E_1 & \to & E_3 \\ & & garçon & \mapsto & chaise \\ & & fille & \mapsto & armoire \end{array}$$

2/ Application surjective et non injective

$$\begin{array}{cccc} f & : & E_3 & \to & E_1 \\ & & chaise & \mapsto & garçon \\ & & armoire & \mapsto & fille \\ & & table & \mapsto & fille \end{array}$$

3/ Application ni injective, ni surjective

$$\begin{array}{cccc} f & : & E_1 & \to & E_3 \\ & & garçon & \mapsto & chaise \\ & & fille & \mapsto & chaise \end{array}$$

4/ Application bijective injective et surjective

$$\begin{array}{cccc} f & : & E_1 & \to & E_2 \\ & & garçon & \mapsto & lune \\ & & fille & \mapsto & soleil \end{array}$$

Exercice 3

1. f n'est pas injective car $(4, 2) \neq (6, 3)$ et $f(4, 2) = f(6, 3)$.
2. f n'est pas surjective car $\sqrt{2}$ n'admet pas d'antécédants par f. En effet, supposons qu'il existe un couple $(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ tel que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. On a necessairement $m \in \mathbf{N}^*$. Il existe a, b deux entiers premiers entre eux tel que $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} = \sqrt{2}$.
   L'entier a est pair car $2b^2 = a^2$. Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $a = 2p$, on a alors $b^2 = \frac{4p^2}{2} = 2p^2$. L'entier b est donc pair , ce qui absurde car a et b sont premiers entre eux.
3. $f(\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*) = \mathbf{Q}$.
4. (a)

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(\{1\}) & = & \{(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \mid \dfrac{m}{n} = 1\} \\ & = & \{(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \mid m = n\} \\ & = & \{(n, n), \mid n \in \mathbf{N}^*\} \end{array}$$

   (b)

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(\{q\}) & = & \{(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \mid \dfrac{m}{n} = q\} \\ & = & \{(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \mid m = qn\} \\ & = & \{(qn, n) \mid n \in \mathbf{N}^*\} \end{array}$$

(c)

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{\mathbf{Z}\}) &= \{(m,n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \mid \frac{m}{n} \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{(m,n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \mid m \in n\mathbf{Z}\} \\ &= \{(m \times n, n) \mid n \in \mathbf{N}^*, m \in \mathbf{Z}\}. \end{aligned}$$

Exercice 5

1. La relation binaire $\mathcal{R}$
   (a) Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbf{R}$.
      i. $\mathcal{R}$ est réflexive : Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.
      $x \leq x$ et $y \leq y$, donc $(x,y)\mathcal{R}(x,y)$.
      ii. $\mathcal{R}$ est antisymétrique. Soient $(x,y),(x',y') \in \mathbf{R}^2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (x,y)\mathcal{R}(x',y') \\ (x',y')\mathcal{R}(x,y) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq x' \text{ et } y \leq y' \\ x' \leq x \text{ et } y' \leq y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x' \\ y = y' \end{array} \right. \Rightarrow (x,y) = (x',y')$$

      iii. $\mathcal{R}$ est transitive. Soient $(x,y),(x',y'),(x",y") \in \mathbf{R}^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x,y)\mathcal{R}(x',y') \\ (x',y')\mathcal{R}(x",y") \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq x' \text{ et } y \leq y' \\ x' \leq x" \text{ et } y' \leq y" \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq x" \\ y \leq y" \end{array} \right. \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x',y')$$

   (b) La relation $\mathcal{R}$ est partiel. En effet, les deux couples $(1,2)$ et $(2,1)$ ne sont pas comparable par $\mathcal{R}$.
   (c) On cherche tous les couples (x,y) tels que $(1,1)\mathcal{R}(x,y)$, ce sont les couples qui vérifient :

$$1 \leq x \text{ et } 1 \leq y$$

   Il s'agit d'un quart de plan limité par la demi-droite $x = 1$ et $y \leq 1$ (demi-droite comprise) et à gauche par la demi-droite $y = 1$ et $x \geq 1$ (demi-droite comprise).
2. Relation binaire $\mathcal{S}$
   (a) Montrons que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre sur $\mathbf{R}$.
      i. $\mathcal{S}$ est réflexive :
      ($x = x$ et $y \leq y$) donc $(x,y)\mathcal{S}(x,y)$.
      ii. $\mathcal{S}$ est antisymétrique : Soient $(x,y),(x',y') \in E^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x,y)\mathcal{S}(x',y') \\ (x',y')\mathcal{S}(x,y) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < x' \text{ ou } x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' < x \text{ ou } x' = x \text{ et } y' \leq y \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < x' \\ x' < x \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x < x' \\ x' = x \text{ et } y' \leq y \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' < x \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' = x \text{ et } y' \leq y \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x' \text{ et } y \leq y' \\ x' = x \text{ et } y' \leq y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x' \\ y = y' \end{array} \right. \Rightarrow (x,y) = (x',y')$$

iii. $\mathcal{S}$ est transitive : Soient $(x,y),(x',y'),(x",y") \in \mathbf{R}^2$

$$\left\{\begin{array}{l}(x,y)\mathcal{S}(x',y')\\(x',y')\mathcal{S}(x",y")\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x<x' \text{ ou } x=x' \text{ et } y\leq y'\\x'<x" \text{ ou } x'=x" \text{ et } y'\leq y"\end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x<x'\\x'<x"\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}x<x'\\x'=x" \text{ et } y'\leq y"\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}x=x' \text{ et } y\leq y'\\x'<x"\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}x=x' \text{ et } y\leq y'\\x'=x" \text{ et } y'\leq y"\end{array}\right.$$
$$\Rightarrow (x<x") \text{ ou } (x<x" \text{ et } y'<y") \text{ ou } (x<x" \text{ et } y\leq y') \text{ ou } (x=x" \text{ et } y\leq y")$$
$$\Rightarrow (x<x") \text{ ou } (x=x" \text{ et } y\leq y") \Rightarrow (x,y)\mathcal{S}(x",y")$$

Finalement $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre (partiel).

(b) Considérons deux couples (x,y) et (x',y') de E^2. Il y a plusieurs cas :
Si $x<x'$ alors $(x,y)\mathcal{S}(x',y')$.
Si $x>x'$ alors $(x',y')\mathcal{S}(x,y)$.
Si $x=x'$ et $y<y'$ alors $(x,y)\mathcal{S}(x',y')$
Si $x=x'$ et $y>y'$ alors $(x',y')\mathcal{S}(x,y)$
Si $x=x'$ et $y=y'$ alors $(x,y)=(x',y')$ et $(x,y)\mathcal{S}(x',y')$.
Tous les couples sont comparables, $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre total.

(c) On cherche tous les couples (x,y) tels que $(1,1)\mathcal{S}(x,y)$, ce sont les couples qui vérifient :

$$1<x \text{ ou } (1=x \text{ et } 1\leq y)$$

Il s'agit d'un quart de plan limité par la demi-droite $x\geq 1$ et $y=1$ (demi-droite comprise) et à gauche par la demi-droite $x=1$ et $y\geq 1$ (demi-droite non comprise).