	Préing 1 **Devoir Surveillé 1** **Algèbre II**	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date:* **Vendredi 21 Janvier 2022** *Durée:* **1h30** *Nombre de pages:* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 5 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1 (4 *points*)

Déterminer, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ et en utilisant le pivot de Gauss, l'ensemble des solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & 1 \\ 3x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & m \end{array}\right.$$

<u>**Solution**</u>

Notons $(\mathscr{S})$ le système.

Alors $(\mathscr{S}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & +y & -y & =1 \\ & -2y+2z & =-2 & L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ & -3y+3z & =m-1 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rll} x+y-z & =1 & \\ y-z & =1 & L_2 \leftarrow L_2/-2 \\ -3y+3z & =m-1 & L_3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ \quad y-z=1 \\ \qquad 0=m+2 \quad L_3 \leftarrow L_3+3L_2 \end{array}\right.$$

On peut alors discuter suivant les valeurs de m :

- Si $m+2 \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq -2$, le système n'admet pas de solutions.
- Si $m=-2$, alors le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=1+z \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est alors $\{(0, z+1, z); z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2

Discuter suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z = a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z = a - a^2 \\ \qquad\qquad x + y + z = 1 - a \end{cases}$$

Solution

Notons (S) ce système, et appliquons la méthode du pivot de Gauss en choisissant la troisième ligne comme pivot:

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z & = 1-a & L_3 \\ y+z & = 0 & L_2 - aL_3 \\ (1-2a)y + (1-2a)z & = 2a^2 - a & L_1 - aL_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 - a \\ \quad y + z = 0 \\ a(2a-1) = 0 \end{cases}$$

On distingue alors plusieurs cas. Si $a \notin \{0, 1/2\}$, le système n'est pas compatible et n'admet donc pas de solutions. Si $a = 0$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$$

et donc l'ensemble des solutions est $\{(1, y, -y); y \in \mathbb{R}\}$. Si $a = 1/2$, le système devient

$$\begin{cases} x + y + z = 1/2 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$$

et donc l'ensemble des solutions est $\{(1/2, y, -y); y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3 Montrer que les lois suivantes munissent l'ensemble G indiqué d'une structure de groupe, et préciser s'il est abélien :

1. $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$ sur $G =]-1, 1[$;
2. $(x, y) \star \left(x', y'\right) = \left(x + x', ye^{x'} + y'e^{-x}\right)$ sur $G = \mathbb{R}^2$;

Solution

1. $(G, \star)$ est un groupe car

- $\star$ est une loi de composition interne sur G : en effet, si $x, y \in G$, alors $x \star y \in G$. Pour prouver cela, étudions la fonction définie sur $[-1,1]$ par

$$f(t) = \frac{t+y}{1+ty}$$

Elle est dérivable sur $[-1,1]$, et sa dérivée vérifie

$$f'(t) = \frac{1-y^2}{(1+ty)^2} > 0 \text{ sur } \Big] -1,1[.$$

f est donc strictement croissante sur $[-1,1]$ et on a

$$f(-1) < x \star y = f(x) < f(1).$$

Comme $f(-1) = (-1+y)/(1-y) = -1$ et $f(1) = (1+y)/(1+y) = 1$, on obtient bien que $x \star y \in G$.
- la loi est associative : pour tout $(x,y,z) \in G^3$,

$$\begin{aligned} x \star (y \star z) &= \frac{x + (y \star z)}{1 + x(y \star z)} \\ &= \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\frac{y+z}{1+yz}} \\ &= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \end{aligned}$$

et un calcul similaire donne le même résultat pour $(x \star y) \star z$.
- 0 est un élément neutre pour la loi $\star$. En effet,

$$x \star 0 = 0 \star x = \frac{x+0}{1+0} = x.$$

- Tout élément $x \in G$ est inversible, d'inverse $-x$. En effet, on a

$$x \star (-x) = (-x) \star x = \frac{x-x}{1-x^2} = 0$$

De plus, le groupe est clairement abélien.

2. Il est clair que $\star$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^2$. De plus, - cette loi est associative :

$$\begin{aligned} (x,y) \star \left((x',y') \star (x'',y'')\right) &= (x,y) \star \left(x'+x'', y'e^{x''} + y''e^{-x'}\right) \\ &= \left(x+x'+x'', ye^{x'+x''} + y'e^{x''}e^{-x} + y''e^{-x'}e^{-x}\right) \\ &= \left(x+x'+x'', ye^{x'+x''} + y'e^{-x+x''} + y''e^{-x-x'}\right) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \left((x,y) \star (x',y')\right) \star (x'',y'') &= \left(x+x', ye^{x'} + y'e^{-x}\right) \star (x'',y'') \\ &= \left(x+x'+x'', \left(ye^{x'} + y'e^{-x}\right)e^{x''} + y''e^{-x-x'}\right) \\ &= \left(x+x'+x'', ye^{x'+x''} + y'e^{-x+x''} + y''e^{-x-x'}\right) \end{aligned}$$

et donc on a bien $(x,y)\star\big((x',y')\star$ $(0,0)$ est un élément neutre de G :

$$(x,y)\star(0,0)=\left(x+0,ye^{0}+0e^{-x}\right)=(x,y)$$
$$(0,0)\star(x,y)=\left(0+x,0e^{x}+ye^{-0}\right)=(x,y)$$

- Tout élément $(x,y)\in G$ admet un inverse donnée par $(-x,-y)$. En effet,

$$(x,y)\star(-x,-y)=\left(x-x,ye^{-x}-ye^{-x}\right)=(0,0),$$
$$(-x,-y)\star(x,y)=\left(-x+x,-ye^{x}+ye^{x}\right)=(0,0).$$

De plus, le groupe n'est pas abélien, car

$$(1,0)\star(0,1)=\left(1,e^{-1}\right)\text{ tandis que }(0,1)\star(1,0)=\left(1,e^{1}\right).$$