CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 4**	
	Matière : **Algèbre** ***Le barème est donné à titre indicatif.***	*Date :* **Jeudi 16 mars 2023** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. L'usage de tout appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.
Le sujet comporte **3** *exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1 :

Partie 1 :

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Soit le système linéaire suivant :

$$(S_1) : \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ x + 2y + 4z = b \\ x + 2y + 2z = c \end{cases}$$

1. Ecrire le système linéaire en forme matricielle.
2. Echelonner la matrice obtenue.
3. Déterminer les conditions sur a, b, c pour que ce système linéaire soit compatible (incompatible).
4. Lorsque le système est compatible, résoudre le système linéaire en fonction de a, b, c, et déterminer son rang.

Partie 2 :

Soit $m \in \mathbb{R}$. Considérons le système linéaire suivant :

$$(S_m) : \quad \begin{cases} x + (m+1)y = 2 \\ mx + (m+4)y = 4 \end{cases}$$

1. Résoudre en fonction de m le système (S_m) tout en précisant les conditions sur m pour que ce système linéaire soit compatible (incompatible).
2. Lorsque le système (S_m) est compatible, donnez son rang.

Partie 3 :

Soit le système linéaire suivant :

$$(S_2) : \quad \begin{cases} -x+2y+3z+t=2 \\ x+z+t=0 \\ x+2y+2z+2t=0 \\ x+2y-3z+2t=1 \end{cases}$$

1. Ecrire le système linéaire en forme matricielle.
2. Echelonner la matrice obtenue.
3. Si le système est compatible, résoudre le système linéaire, et déterminer son rang.

Exercice 2 :

1. Soit $(G, \star)$ un groupe, et $A, B \subset G$ des sous-groupes de G.
   Montrer que $A \cap B$ est un sous-groupe de G.
2. Soit $f, g : (E_1, \star) \longrightarrow (E_2, \top)$ deux morphismes de groupes, soit e_1 et e_2 les éléments neutres des groupes respectifs E_1 et E_2. On rappelle qu'un morphisme de groupes vérifie

$$\forall x, y \in E_1 \quad : \quad f(x \star y) = f(x) \top f(y).$$

   (a) Montrer que $\forall x \in E_1$, $\quad f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$. (On admet que $f(e_1) = e_2$).
   (b) Montrer que $H = \{x \in E_1 \ \ / \ \ f(x) = g(x)\}$ est un sous-groupe de E_1.

Exercice 3 :

Soit l'ensmeble $I = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^*$, et $\star$ une opération définie sur I par :
Pour tout $(x_1, y_1, r_1), (x_2, y_2, r_2) \in I$,

$$(x_1, y_1, r_1) \star (x_2, y_2, r_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, r_1 \cdot r_2),$$

où $\cdot$ est la multiplication usuelle sur $\mathbb{R}_+^*$ et $+$ est l'addition usuelle sur $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $(I, \star)$ est un groupe commutatif.
2. Soit $H = \{(x, y, 5^{-x} \cdot 3^{-y}) \ \ / \ \ x, y \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que H est un sous-groupe de $(I, \star)$.
3. Soit $f : (I, \star) \longrightarrow (\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$, $(x, y, r) \mapsto r \cdot 5^x \cdot 3^y$ où $\cdot$ est la multiplication usuelle sur $\mathbb{Q}_+^*$.
   (a) Montrer que f est un morphisme des groupes.
   (b) Calculer $ker(f)$ et $Im(f)$.
   (c) Est-ce que f est un isomorphisme de groupes ?