Correction DS1 Algèbre

Exercice 1

Partie 1

Soit le système linéaire suivant :

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ x + 2y + 4z = b \\ x + 2y + 2z = c \end{cases}$$

1. Le système linéaire peut être écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

   ou bien on peut simplement aligner les coefficients de chaque variable dans une matrice et ajouter une colonne pour les termes constants

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 4 & b \\ 1 & 2 & 2 & c \end{array} \right)$$

2. Pour échelonner la matrice, on peut utiliser les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice. On peut soustraire la première ligne de la deuxième et troisième lignes pour éliminer les coefficients de x :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & -1 & c-a \end{array} \right)$$

   Ensuite, on peut additionner la deuxième et la troisième ligne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 2a-c-b \end{array} \right)$$

   On a ainsi obtenu une matrice échelonnée.

3. Pour que le système linéaire soit compatible, il faut que la matrice augmentée obtenue lors de l'échelonnement n'ait pas de ligne de la forme [0 0 ... 0 — non zéro]. Autrement dit, il ne faut pas que la dernière ligne de la matrice augmentée soit de la forme [0 0 ... 0 — non zéro]. Cela revient à dire que la dernière ligne de la matrice échelonnée doit être de la forme [0 0 ... 0], ce qui se produit si et seulement si $2a - c - b = 0$. Autrement dit, le système est compatible si et seulement si $a = \frac{b+c}{2}$.
   Si $a \neq \frac{b+c}{2}$, alors la dernière ligne de la matrice échelonnée sera de la forme [0 0 ... 0 — non zéro], ce qui signifie que le système est incompatible.
4. Lorsque le système est compatible, on peut le résoudre en remontant la matrice échelonnée à partir de la dernière ligne non nulle. Dans ce cas, la deuxième ligne est de la forme :

$$0x + 0y + 1z = b - a$$

   Cela donne $z = b - a = \frac{b-c}{2}$. On peut ensuite utiliser cette valeur pour remonter à la première ligne de la matrice échelonnée :

$$x + 2y + 3\left(\frac{b-c}{2}\right) = \frac{b+c}{2}$$

   Cela donne $x = -b + 2c - 2y$. Ainsi, la solution générale du système est :

$$S = \left\{ \left(-b + 2c - 2y,\, y,\, \frac{b-c}{2}\right), \quad y \in \mathbb{R} \right\}$$

   Ainsi, le rang de la matrice échelonnée est 2, ce qui signifie qu'il y a deux variables indépendantes dans la solution générale, ce qui est cohérent avec le fait que le système a trois équations et trois inconnues.

Partie 2 :

Soit le système linéaire suivant :

$$(S_m) : \begin{cases} x + (m+1)y = 2 \\ mx + (m+4)y = 4 \end{cases}$$

1. En appliquant la méthode de pivot de Gauss pour résoudre le système linéaire (S_m), on obtient la matrice échelonnée suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ 0 & -m^2+4 & 4-2m \end{pmatrix}$$

   — Si $m^2 \neq 4$, c'est-à-dire $m \neq \pm 2$, le système (S_m) est compatible et admet une unique solution et dans ce cas l'ensemble de solutions est

$$S = \left\{ \left(\frac{2}{2+m}, \frac{2}{2+m}\right) \right\}.$$

— Si $m = 2$, le système (S_m) est compatible et admet une infinité de solutions et dans ce cas l'ensemble de solutions est donné par

$$S = \Big\{(2-(m+1)y, y),\ y \in \mathbb{R}\Big\}\ .$$

— Si $m = -2$, le système (S_m) est incompatible et n'admet donc pas de solutions.

2. Si le système est compatible, alors son rang est égal au nombre de pivots dans la matrice échelonnée, qui est 2 si $m \neq \pm 2$, et 1 si $m = \pm 2$.

Partie 3 :

Soit le système linéaire suivant :

$$(S_2) : \begin{cases} -x + 2y + 3z + t = 2 \\ x + z + t = 0 \\ x + 2y + 2z + 2t = 0 \\ x + 2y - 3z + 2t = 1 \end{cases}$$

1. Écriture du système linéaire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Échelonnement de la matrice : Pour échelonner la matrice obtenue, nous allons utiliser la méthode de pivot de Gauss. Tout d'abord, nous cherchons le premier coefficient non nul dans la première colonne (c'est-à-dire la première ligne). Dans ce cas, c'est le coefficient -1. Nous allons utiliser cette ligne comme ligne pivot et éliminer les coefficients sous ce pivot. Nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1 + L_4 \end{matrix}$$

Ensuite, nous cherchons le premier coefficient non nul dans la deuxième colonne sous le pivot précédent. Dans ce cas, c'est le coefficient 2 dans la deuxième ligne. Nous utilisons cette ligne comme ligne pivot et éliminons les coefficients sous le pivot. Nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix}$$

Enfin, nous cherchons le premier coefficient non nul dans la troisième colonne sous le dernier pivot trouvé. Dans ce cas, c'est le coefficient -3 dans la troisième ligne. Nous utilisons cette ligne comme ligne pivot et éliminons les coefficients sous le pivot. Nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}_{L_4 \leftarrow 3L_4 - 8L_2}$$

La matrice est maintenant échelonnée.

3. Le système est compatible et admet une unique solution, donc on peut le résoudre directement à partir de la matrice échelonnée :

$$S = \left\{ (\frac{-12}{5}, \frac{-6}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{13}{5} \right\} .$$

Le rang de la matrice est égal au nombre de pivots dans la matrice échelonnée, donc $\text{rang}(A) = 4$.

Exercice 2

1. Pour montrer que $A \cap B$ est un sous-groupe de G, il faut vérifier les trois propriétés suivantes :
   — 1. $A \cap B \subset G$ ce qui est évident.
   — 2. $A \cap B$ contient l'élement neutre de G.
   — 3. Pour tout $x, y \in A \cap B$, $x \star y^{-1} \in A \cap B$.
   - 2. Puisque A et B sont des sous-groupes de G, ils contiennent tous deux l'élément neutre de G, noté e_G. Ainsi, $e_G \in A$ et $e_G \in B$, ce qui implique que $e_G \in A \cap B$. Donc, $A \cap B$ est non vide.
   - 3. Soit $x, y \in A \cap B$. Cela signifie que $x, y \in A$ et $x, y \in B$. Puisque A et B sont des sous-groupes de G, alors $x \star y^{-1} \in A$ et $x \star y^{-1} \in B$. Ainsi, $x \star y^{-1} \in A \cap B$.

   Par conséquent, puisque les trois propriétés sont vérifiées, on a montré que $A \cap B$ est un sous-groupe de G.

2. (a) Soit $x \in E_1$. On veut montrer que $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.
   Remarquons tout d'abord que x^{-1} existe dans le groupe E_1 car E_1 est un groupe.
   Puisque f est un morphisme de groupes, on a $f(e_1) = e_2$, où e_1 et e_2 sont les éléments neutres de E_1 et E_2 respectivement.
   Maintenant, observons que :

$$\begin{aligned} f(x) \perp f(x^{-1}) &= f(x \star x^{-1}) \quad \text{(car } f \text{ est un morphisme de groupes)} \\ &= f(e_1) \quad \text{(car } x \star x^{-1} = e_1, \text{l'élément neutre de } E_1\text{)} \\ &= e_2 \quad \text{(car } f(e_1) = e_2\text{)} \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} f(x^{-1}) \perp f(x) &= f(x^{-1} \star x) \quad \text{(car } f \text{ est un morphisme de groupes)} \\ &= f(e_1) \quad (\text{car } x^{-1} \star x = e_1) \\ &= e_2 \quad (\text{car } f(e_1) = e_2) \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $f(x) \perp f(x^{-1}) = e_2 = f(x^{-1}) \perp f(x)$, ce qui signifie que $f(x^{-1})$ est l'inverse de $f(x)$ dans le groupe E_2.

Par conséquent, on a bien montré que $\forall x \in E_1, f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

(b) Pour montrer que $H = \{x \in E_1 \mid f(x) = g(x)\}$ est un sous-groupe de E_1, il faut vérifier les trois propriétés suivantes :

   i. $H \subset E_1$ ce qui est évident.
   ii. H est non vide.
   iii. Pour tout $x, y \in H$, $x \star y^{-1} \in H$.

   - ii. Puisque f et g sont deux morphismes de E_1 dans E_2, on a $f(e_1) = g(e_1) = e_2$, où e_1 et e_2 sont les éléments neutres de E_1 et E_2 respectivement. Ainsi, $e_1 \in H$ et donc H est non vide.
   - iii. Soit $x, y \in H$. Cela signifie que $f(x) = g(x)$ et $f(y) = g(y)$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(x \star y^{-1}) &= f(x) \perp f(y^{-1}) \quad \text{(car } f \text{ est un morphisme de groupes)} \\ &= f(x) \perp f(y)^{-1} \quad (\text{car } f(y^{-1}) = f(y)^{-1}) \\ &= g(x) \perp g(y)^{-1} \quad (\text{car } f(x) = g(x) \text{ et } f(y) = g(y)) \\ &= g(x) \perp g(y^{-1}) \quad (\text{car } g(y)^{-1} = g(y^{-1})) \\ &= g(x \star y^{-1}) \quad \text{(car } g \text{ est un morphisme de groupes)} \end{aligned}$$

   Ainsi, $f(x \star y^{-1}) = g(x \star y^{-1})$, ce qui implique que $x \star y^{-1} \in H$.

Par conséquent, puisque les trois propriétés sont vérifiées, on a montré que H est un sous-groupe de E_1.

Exercice 3

1. Montrons que $(I, \star)$ est un groupe commutatif :

   (a) $\star$ est **une loi de composition interne sur I** car $\forall (x_1, y_1, r_1), (x_2, y_2, r_2) \in I$, on a $(x_1, y_1, r_1) \star (x_2, y_2, r_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, r_1 \cdot r_2) \in I$.

   (b) $\star$ est **associative** car $\forall (x_1, y_1, r_1), (x_2, y_2, r_2), (x_3, y_3, r_3) \in I$, on a $[(x_1, y_1, r_1) \star (x_2, y_2, r_2)] \star (x_3, y_3, r_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3, r_1 \cdot r_2 \cdot r_3) = (x_1, y_1, r_1) \star [(x_2, y_2, r_2) \star (x_3, y_3, r_3)]$.

   (c) $(0, 0, 1)$ est **l'élément neutre** de $\star$ car $\forall (x, y, r) \in I$, on a $(0, 0, 1) \star (x, y, r) = (0 + x, 0 + y, 1 \cdot r) = (x, y, r)$ et $(x, y, r) \star (0, 0, 1) = (x + 0, y + 0, r \cdot 1) = (x, y, r)$.

(d) Tout élément $(x, y, r) \in I$ admet **un inverse** $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{r})$ tel que $(x, y, r) \star (\bar{x}, \bar{y}, \bar{r}) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{r}) \star (x, y, r) = (0, 0, 1)$, où $\bar{x} = -x$, $\bar{y} = -y$ et $\bar{r} = r^{-1}$ (l'inverse de r dans $\mathbb{R}_+^*$). En effet, $\bar{r} \in \mathbb{R}_+^*$ car $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\bar{r} \cdot r = r^{-1} \cdot r = 1 \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{r}) \in I$ car $\bar{r} \in \mathbb{R}_+^*$ et $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}$.

(e) $\star$ est **commutative** car $\forall (x_1, y_1, r_1), (x_2, y_2, r_2) \in I$, on a $(x_1, y_1, r_1) \star (x_2, y_2, r_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, r_1 \cdot r_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1, r_2 \cdot r_1) = (x_2, y_2, r_2) \star (x_1, y_1, r_1)$ et $\star$ est commutative.

Ainsi, $(I, \star)$ est un groupe commutatif.

2. Montrons que H est un sous-groupe de $(I, \star)$:

(a) $H \subset I$ car $x, y \in \mathbb{Z}$ et $5^{-x} \cdot 3^{-y} \in \mathbb{R}_+^*$.

(b) H est non vide car $(0, 0, 1) \in H$.

(c) Soit $(x_1, y_1, r_1), (x_2, y_2, r_2) \in H$, alors $(x_1, y_1, r_1) \star (x_2, y_2, r_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, r_1 \cdot r_2) \in H$ car $r_1 \cdot r_2 = 5^{-x_1} \cdot 3^{-y_1} \cdot 5^{-x_2} \cdot 3^{-y_2} = 5^{-(x_1+x_2)} \cdot 3^{-(y_1+y_2)}$ et $x_1 + x_2, y_1 + y_2 \in \mathbb{Z}$. Ainsi, H est stable par $\star$.

(d) Soit $(x, y, r) \in H$, alors $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{r}) = (-x, -y, 5^{-x} \cdot 3^{-y}) \in H$ car $5^x \cdot 3^y \cdot 5^{-x} \cdot 3^{-y} = 5^{-x} \cdot 3^{-y} \cdot 5^x \cdot 3^y = 1$ et $-x, -y \in \mathbb{Z}$. De plus, $(x, y, r) \star (\bar{x}, \bar{y}, \bar{r}) = (0, 0, 1) \in H$. Ainsi, H admet un inverse pour tout élément.

Donc, H est un sous-groupe de $(I, \star)$.