Préing 1
Devoir Surveillé 1
Analyse I

L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* *13/11/2023* *Durée :* **1h00** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

⋄ ⋄ ⋄

Exercice 1 (4 points) : **Choisir deux des trois questions suivants.** Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{x}{3}\right)$.

   Solutions : Nous avons

$$\begin{aligned}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{x}{3}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{3}\right).\end{aligned}$$

   Par conséquent, $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} & 2x-\frac{\pi}{3}\equiv\frac{\pi}{2}-\frac{x}{3}\ [2\pi] \ \text{ ou } \ 2x-\frac{\pi}{3}\equiv\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{x}{3}\ [2\pi]\\ \Longleftrightarrow\ & \frac{7x}{3} = \frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \ \text{ ou } \ \frac{5x}{3}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \Longleftrightarrow\ & x=\frac{5\pi}{14}+\frac{6k\pi}{7},\ k\in\mathbb{Z} \ \text{ ou } \ x=\frac{\pi}{2}+\frac{6k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

2. $2\cos^2(x)+9\cos(x)+4=0$.

   Solutions : Nous avons

$$0 \ = \ 2\cos^2(x)+9\cos(x)+4 \ = \ 2(\cos(x)+4)\left(\cos(x)+\frac{1}{2}\right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 0 \;=\; 2\cos^2(x)+9\cos(x)+4 \quad &\Longleftrightarrow \quad \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

3. $|x-2|+|x+3|\leq 1$.

Solutions : Nous avons

$$|x-2|+|x+3|\leq 1 \iff |x+3|\leq 1-|x-2| \iff -1+|x-2|\leq x+3\leq 1-|x-2|$$

Si $x\geq 2$, alors

$$|x-2|+|x+3|\leq 1 \iff -1+x-2\leq x+3\leq 1-x+2 \iff x-3\leq x+3\leq -x+3 \iff 2x-6\leq 2x\leq 0.$$

Ce qui est impossible car $x\geq 2$, donc il n'y a pas de solution sur l'intervalle $[2,+\infty[$. Si $x<2$, alors

$$|x-2|+|x+3|\leq 1 \iff -1-x+2\leq x+3\leq 1+x-2 \iff -x+1\leq x+3\leq x-1 \iff -2x-2\leq 0\leq -4.$$

Ce qui est impossible, il n'y a donc pas de solution sur l'intervalle $]-\infty,2[$.

Exercice 2 : (5 points)

1. Trouver sous la forme $\frac{p}{q}$, le rationnel x dont les développement décimal périodiques est donné par : $2,71\overline{18}$.

   Solution : Soit $r=$. L'idée est d'abord de faire apparaître la partie périodique juste après la virgule. Ici la période commence deux chiffres après la virgule, donc on multiplie par 100 :

   $$100r = 271,\overline{18}. \tag{1}$$

   Maintenant on va décaler tout vers la gauche de la longueur d'une période, donc ici on multiplie par 100 pour décaler de 2 chiffre :

   $$100\times 100r = 27118,\overline{18} \tag{2}$$

   Les parties après la virgule des lignes (1) et (2) sont les mêmes, donc si on les soustrait en faisant (2)-(1) alors les parties décimales s'annulent :

   $$100\times 100r - 100r = 27118-271.$$

   Donc $9900r = 26847$ et

   $$2,71\overline{18} = \frac{26847}{9900}.$$

2. On considère la fonction :
$$f(x) = \frac{E(x)}{2E(x)-1},$$
où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

(a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Solution : Nous avons
$$2E(x)-1=0 \iff E(x) = \frac{1}{2}.$$
Ce qui est impossible car $E(x) \in \mathbb{Z}$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(b) Déterminer, s'il en existe, tous les antécédents de 1.
Autrement dit, déterminer la solution de l'équation $f(x) = 1$.

Solution : Nous avons
$$f(x)=1 \iff \frac{E(x)}{2E(x)-1} = 1 \iff E(x) = 2E(x)-1 \iff E(x)=1$$
Donc $x \in [1,2[$.

(c) Déterminer, s'il en existe, tous les antécédents de -3.
Autrement dit, déterminer la solution de l'équation $f(x) = -3$.

Solution : Nous avons
$$f(x)=-3 \iff \frac{E(x)}{2E(x)-1} = -3 \iff E(x) = -6E(x)+3 \iff E(x)=\frac{3}{7}.$$
Or $E(x) \in \mathbb{Z}$, donc il n'y a pas d'antécédent pour -3.

Exercice 3 (4 points) : **Choisir deux des trois questions suivants**. Calculer les sommes et les produits suivants :

1. $\sum_{k=1}^{n} 3^{2k}$

Solution : Nous avons
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 3^{2k} &= \sum_{k=1}^{n} 9^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} 9^k - 9^0 \\ &= \frac{9^{n+1}-1}{9-1} - 1 = \frac{9(9^n-1)}{8}\end{aligned}$$

2. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{3^k}\binom{n}{k}$

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{3^k}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \quad - \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \left(1-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n.
\end{aligned}$$

3. $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n} 2k+1 &= \left(\prod_{k=1}^{2n+1} k\right)\cdot\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)^{-1} \\
&= \left(\prod_{k=1}^{2n+1} k\right)\cdot\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{-1}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n} 2\right)^{-1} \\
&= (2n+1)!\cdot\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n} \\
&= \frac{(2n+1)!}{2^n n!}
\end{aligned}$$

Exercice 4 (7 points) : On considère les ensembles A et B suivants

$$A =, \left\{x\in\mathbb{R}\setminus\{1\} : \frac{2}{x-1} \leq 2x-5 < 11\right\} \quad ; \quad B = \left\{\frac{2^n}{2^n-1} : n\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

1. Les ensembles A et B sont-ils majorés, minorés ? Justifier votre réponse.

Solution : Commençons par étudier l'ensemble A. Nous avons

$$\begin{aligned}
x\in A \iff \frac{2}{x-1} \leq 2x-5 < 11 &\iff 0 \leq \frac{(2x-5)(x-1)-2}{x-1} \quad \text{et} \quad x<8 \\
&\iff 0 \leq \frac{2x^2-7x+3}{x-1} \quad \text{et} \quad x<8 \\
&\iff 0 \leq \frac{(2x-1)(x-3)}{x-1} \quad \text{et} \quad x<8
\end{aligned}$$

En faisant un tableau de signe, nous pouvons conclure que

$$x\in A \iff x\in \left(\left[\frac{1}{2},1\right[\cup [3,+\infty[\right)\cap\,]-\infty,8[.$$

Ainsi

$$A = \left[\frac{1}{2}, 1\right[\ \cup \ [3, 8[.$$

Par conséquent, A est majorée par tout réel supérieur ou égal à 8, et A est minorée par tout réel inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$.

Solution : Pour B, nous avons

$$\frac{2^n}{2^n - 1} \ = \ \frac{2^n - 1 + 1}{2^n - 1} \ = \ 1 + \frac{1}{2^n - 1} \ > \ 1.$$

De plus

$$\frac{1}{2^n - 1} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 + \frac{1}{2^n - 1} \ \leq \ 2.$$

Ainsi, B est minorée par tout réel inférieur ou égal à 1 et majorée par par tout réel supérieur ou égal à 2.

2. Pour chaque ensemble A et B déterminer, s'il existe, les bornes supérieure et inférieure ainsi que le plus grand et le plus petit élément. Justifier votre réponse.

Solutions : Commençons par étudier l'ensemble A. D'après la question précédente, nous avons

$$A = \left[\frac{1}{2}, 1\right[\ \cup \ [3, 8[.$$

Donc

$$\sup A = 8 \quad \text{et} \quad \min A = \inf A = \frac{1}{2}.$$

Étudions maintenant l'ensemble B. D'après la question précédente, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 1 < \frac{2^n}{2^n - 1} \leq 2.$$

Or

$$2 = \frac{2^1}{2^1 - 1} \quad \Longrightarrow \quad 2 \in B.$$

Ainsi, 2 est un majorant de B qui appartient à B. Ce qui nous permet de conclure

$$\max(B) = \sup(B) = 2.$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{2^n}{2^n - 1} \geq \inf(B).$$

Donc par passage à la limite, on obtient

$$1 = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} \geq \lim_{n \to +\infty} \inf(B) = \inf(B).$$

Or, on sait que $1 \leq \inf(B)$. Par conséquent

$$\inf(B) = 1.$$

Notons que $1 \notin B$, donc B ne possede pas de minimum.