

	Préing 2 : DS 1 (sujet 1) d'Analyse dans \mathbb{R}^n	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.	<i>Date</i> : Lundi 13 Novembre 2023 <i>Durée</i> : 1h <i>Nombre de pages</i> : 1 page recto

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. Le sujet comporte 3 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.



Exercice 1 : Questions de cours/TD (4.5 points)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé quelconque. Soit $r > 0$ et a un point quelconque de E . Montrer que la boule fermée de centre a et de rayon r , $\overline{B}(a, r)$, est un fermé.

Exercice 2 : 2 normes sur \mathbb{R}^2 (9 points)

Soit les deux applications suivantes définies sur \mathbb{R}^2

$$N_1(x, y) = |3x + y| + |x + y| \quad \text{et} \quad N_2(x, y) = \frac{1}{2}|x| + |y|$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur \mathbb{R}^2 . (4.5 points)
2. Que signifie que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes? (1 point)
3. Ces normes sont-elles équivalentes? (0.5 point)
4. Tracer la sphère associée à la norme N_1 de centre $(0, 0)$ et de rayon $r = 1$. (3 points)

Exercice 3 : un peu de topologie dans \mathbb{R} (6.5 points)

On munit \mathbb{R} de sa norme usuelle $|\cdot|$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit les ensembles suivants

$$I_1 =]a; b] \quad I_2 = ([-1; 1[\cap]0; 2]) \cup \{3\}$$

1. Déterminer si les ensembles précédents sont ouverts, fermés, ou aucun des deux en passant soit directement par les définitions soit en utilisant les suites d'éléments de \mathbb{R} . (2.5 points)
2. Déterminer l'intérieur de I_1 et l'adhérent de I_2 par la méthode de votre choix. (4 points)