Préing 1 : MIM1-GCA-MEF2-MI3
Devoir Surveillé 1

Matière : **Analyse II**	Date : **Mardi 12 mars 2024**
L'usage de tout appareil électronique est interdit	Durée : **1h**
	Nombre de pages : **1**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. *Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1. (4 points) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{1+x^2} & \text{si } x < 1 \\ 2e^{(1-x)(1+x)} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle dérivable en $x = 1$?
2. Étudier les extrema de f.

Exercice 2. (3 points) Calculer les limites suivantes (noter que $e = \exp(1)$) :

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$
2. $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \frac{\exp(\sin(x)+1) - e}{x - \pi}$

Exercice 3. (8 points) Soit f la fonctions définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 \ln x \ .$$

Soit $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$.

1. Rappeler la formule de Leibniz.
2. Calculer la dérivée k-ième de $\ln x$.
3. En déduire l'expression de la dérivée n-ième de f.
4. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement $\tilde{f}$.
5. Montrer que le prongement de f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
6. $\tilde{f}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^2$? $\mathcal{C}^3$?

Exercice 4. (6 points) Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \exp\left(\frac{1}{t}\right)$.

1. Rappeler le théorème des accroissements finis appliqué à une fonction f sur le segment $[a, b]$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que
$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2} \exp\left(\frac{1}{c}\right) .$$
3. Montrer que la fonction $g(t) = \frac{1}{t^2} \exp\left(\frac{1}{t}\right)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. En déduite que
$$\frac{1}{(x+1)^2} \exp\left(\frac{1}{x+1}\right) < f(x) - f(x+1) < \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$
5. Déterminer
$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) .$$