



Préing 1

Devoir Surveillé 1

Algèbre I

L'usage de tout appareil électronique est interdit

Date : 24/10/2023

Durée : 1h00

Nombre de pages : 1

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 6 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1 : Soient P et Q deux propositions. Montrer l'équivalence suivante :

$$\left[\left(P \text{ et } (P \Rightarrow Q) \right) \Rightarrow Q \right] \Leftrightarrow \left[\left(\text{Non}Q \text{ et } (P \Rightarrow Q) \right) \Rightarrow \text{Non}P \right]$$

Exercice 2 : Quelle est la valeur de vérité de chacune des formules suivantes :

- (5 est un entier positif) ou (2 < 3)
- 110 est divisible par 10 si et seulement si il est divisible par 2 et par 5
- Si 22 est un nombre premier, alors si $11 \neq 1$ et $11 \neq 22$, 11 n'est pas un diviseur de 22.

Exercice 3 : Écrire la négation, la réciproque et la contraposée des implications suivantes :

1. $\forall x \forall y, (P(x, y) \text{ et } Q(x, y)) \Rightarrow R(x, y)$.
2. $\exists x \forall y, Q(x, y) \Rightarrow (P(x, y) \text{ ou } R(x, y))$.

Exercice 4 :

1. En utilisant une démonstration par contraposition, démontrer l'implication suivante :
 n est premier $\Rightarrow n=2$ ou n est impair
2. En utilisant une démonstration par récurrence, démontrer la propriété suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(n) : 10^n - (-1)^n \text{ est divisible par } 11$$

Exercice 5 : Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et soit les parties suivantes de E :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{4, 5, 6, 7\}; C = \{1, 3, 5, 7\}; D = \{2, 3, 4, 5, 6\}; F = \{2, 5\}.$$

Calculer :

$$(A^c \cap D)^c \cap (B \cup C)^c, (A \cap B) \times C, (A \Delta B) \Delta C, \mathcal{P}(F)$$

Exercice 6 : Simplifier les expressions suivantes où A , B et C sont des parties d'un ensemble E :

1. $A \cap (A^c \cup B)$
2. $A \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$