Préing 1
Devoir Surveillé 1
Analyse II

L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **11 / 03 / 2024** *Durée :* **1h** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte quatre exercices plus un exercice bonus. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1 (3 points) : Soient a et b deux réels non nuls. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} ax\left(e^{b/x} - 1\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{bx}.$$

Exercice 2 (6 points) :

1. Calculer les deux premières dérivées de chacune des deux fonctions f et g définies par :

$$f(x) = e^x - \ln(x+1) - \frac{x^2}{2} - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(x) - \sqrt{\cos(2x)}.$$

2. En déduire la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Exercice 3 (6 points) : Soit f une fonction réelle à valeurs réelles définie par

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \geqslant 0, \\ 2\sin(x) - \cos(x), & x < 0. \end{cases}$$

1. Déterminer les conditions sur a, b et c pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ dans $\mathbb{R}^*$ et déterminer les conditions sur a, b et c pour que f' soit continue sur $\mathbb{R}$
3. Calculer $f''(x)$ dans $\mathbb{R}^*$ et déterminer les conditions sur a, b et c pour que f'' soit continue sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $f'''(x)$ dans $\mathbb{R}^*$. Est-ce que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$?

Tournez la page !

Exercice 4 (6 points) :

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe $c \in [x, x+1]$ pour $x \geqslant 1$ tel que

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{c^2}\cos\left(\frac{1}{c}\right).$$

2. En admettant que la fonction "$t \mapsto t^2\cos(t)$" est croissante sur l'intervalle $]0,1]$, donner un encadrement pour "$\frac{1}{c^2}\cos\left(\frac{1}{c}\right)$" pour $x \geqslant 1$.
3. En déduire la limite, en $+\infty$, de la fonction : $x^2\left[\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x+1}\right)\right]$.

Exercice bonus (4 points) : Soit f une fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \sin(x)$.

1. En étudiant les variations de f, montrer que f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $]-1,1[$.
2. Notons par g la fonction réciproque de f, i.e. $g = f^{-1}$. Montrer que g est dérivable sur $]-1,1[$ et que :

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in]-1,1[.$$

Indication : combiner l'expression de la dérivée de g avec l'identité

$$\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}, \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$