CY TECH	**Préing 1, GC–MI1–MIM1–MIM2–SUPM** **Devoir Surveillé 1**
	Matière : **Algèbre II** L'usage de tout appareil électronique est interdit
	Date : **mercredi 6 mars 2024** *Durée :* **1h** *Nombre de pages :* **1**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. *Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé. Le barème est indicatif.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1 (3 pts, questions de cours). Soient G et G' des groupes d'éléments neutres respectifs e et e', et soit $f: G \to G'$ un morphisme de groupe.

1. (1 pt) Rappeler la définition de $\ker f$, le noyau de f.

2. (2 pts) Démontrer que $\ker f$ est un sous-groupe de G.

Exercice 2 (6 pts). Sur l'ensemble $\mathbb{Q}^2$, on définit une loi de composition interne $*$ par :

$$\forall (a,b), (a',b') \in \mathbb{Q}^2, \quad (a,b) * (a',b') = (aa' + 2bb',\ ab' + a'b).$$

1. (1,5 pt) Montrer que $*$ est associative et commutative.

2. (1 pt) Montrer que le magma $(\mathbb{Q}^2, *)$ possède un élément neutre.

3. Dans cette question, on considère $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $(a,b) \neq (0,0)$.

- **a.** (1 pt) Calculer $(a,b) * (a,-b)$.
- **b.** (1 pt) Montrer que $a^2 - 2b^2$ ne peut pas être nul.
- **c.** (0,5 pt) En déduire que (a,b) est symétrisable et donner l'expression de son symétrique.

4. (1 pt) Montrer que pour tous $(a,b), (a',b') \in \mathbb{Q}^2$, on a :

$$(a,b) * (a',b') = (0,0) \implies (a,b) = (0,0) \text{ ou } (a',b') = (0,0).$$

En déduire que $*$ est une loi de composition interne sur $G = \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et que $(G, *)$ est un groupe.

Exercice 3 (5 pts). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et on considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & k & \longmapsto & \omega_n^k \end{array}$$

1. (2 pts) Montrer que f est un morphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

2. (2 pts) Déterminer le noyau et l'image de f.

3. (1 pt) En déduire que $\mathbb{U}_n$, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 4 (6 pts). Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. On considère le système linéaire d'inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 2m. \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_m)$$

1. (1 pt) Écrire la matrice augmentée A_m associée à $(\mathcal{S}_m)$.

2. (2 pts) Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour échelonner A_m.

3. (1 pt) En déduire que le rang de $(\mathcal{S}_m)$ est strictement inférieur à 3 si et seulement si $m = 1$ ou $m = 0$.

4. (2 pts) Pour $m = 1$ et $m = 0$, dire si le système est compatible et déterminer l'ensemble des solutions le cas échéant.