Préing 1
Devoir Surveillé 1
Algèbre I

L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **Mercredi 25 Octobre 2023** *Durée :* **1h00** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

⋄ ⋄ ⋄

Exercice [5 points]

1. Soient P, Q et R des propositions. Montrer, en utilisant les tables de vérité, que l'implication suivante est toujours vraie :

$$(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies R) \quad \implies \quad P \implies R.$$

2. Soient P, Q et R trois propositions. On suppose que P est vraie, que Q est fausse et que R est vrai. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?
   (a) $\big[\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)\big] \implies \big[P \text{ ou } \text{non}(R)\big].$
   (b) $\text{non}\big(\text{non}(P) \implies \text{non}(Q)\big) \text{ et } R.$

Solution :

1. Nous avons

P	Q	R	$P \implies Q$	$Q \implies R$	$P \implies Q$ et $Q \implies R$	$P \implies R$	$P \implies Q$ et $Q \implies R \implies P \implies \mathbb{R}$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

2. (a)

$$\underbrace{\underbrace{\text{non}(P) \text{ ou non}(Q)}_{\text{Faux ou Vrai = Vrai}} \implies \underbrace{P \text{ ou } \text{non}(R))}_{\text{Vrai ou Faux = Vrai}}}_{\text{Vrai}}.$$

(b)

$$\underbrace{\underbrace{\text{non}\left(\underbrace{\text{non}(P) \implies \text{non}(Q)}_{\text{Faux} \implies \text{Vrai} = \text{Vrai}}\right)}_{\text{Faux}} \quad \text{et} \quad \underbrace{R}_{\text{Vrai}}}_{\text{Faux}}.$$

Exercice [5 points]

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :
   (a) f est une fonction constante.

   Solution : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C.$

   (b) La fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$.

   Solution : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0.$

2. Soient E et F deux ensembles et f une application $f : E \longrightarrow F$. Considérons la proposition P donnée par

$$P : \forall x \in E, \forall y \in E, \quad x \neq y \quad \implies \quad f(x) \neq f(y)$$

   (a) Donner la négation de P.

   Solution : $\exists x \in E, \exists y \in E, \quad x \neq y \quad \text{et} \quad f(x) = f(y)$

   (b) Donner la contraposée de P.

   Solution : $\forall x \in E, \forall y \in E, \quad f(x) = f(y) \quad \implies \quad x = y$

   (c) Donner la négation de la contraposée de P. Comparer avec la réponse obtenue dans la question 1.

   Solution : $\exists x \in E, \exists y \in E, \quad f(x) = f(y) \quad \text{et} \quad x \neq y.$

Exercice [5 points] **Choisir trois des quatre questions suivants.**

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

   Solution : Voir Exercice 2.10 du TD Logique et Raisonnement.

2. Démontrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \;=\; (n+1)! - 1.$$

   Solution : On raisonne par récurrence sur n.

   Initialisation : On a

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 = 2 - 1 = 2! - 1.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit, montrons

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = ((n+1)+1)! - 1 = (n+2)! - 1.$$

On compute

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \left(\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!\right) + (n+1) \cdot (n+1)! \\
&\underbrace{=}_{\text{Hypothèse de Recurrence}} (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\
&= (n+1)!(1 + (n+1)) - 1 \\
&= (n+1)!(n+2) - 1 \\
&= (n+2)! - 1.
\end{aligned}$$

Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, et on conclut pour tout entier naturel n l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

3. Montrer que pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$a + b + c = 0 \implies (a \leq 0 \text{ ou } b \leq 0 \text{ ou } c \leq 0).$$

Indication : raisonner par contraposée.

Solution : On raisonne par contraposition. Nous devons montrer

$$(a > 0 \text{ et } b > 0 \text{ et } c > 0) \implies a + b + c \neq 0.$$

Supposons

$$a > 0\ ;\ b > 0\ ;\ c > 0.$$

En additionnant les trois inéquations on obtient

$$a + b + c > 0 \implies a + b + c \neq 0.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Demontrer par l'absurde que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.
   Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que
$$a = \sqrt{n^2+1}$$
   Alors
$$a^2 = n^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad a^2 - n^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad (a-n)(a+n) = 1.$$
   Ainsi
$$(a-n) = (a+n) = 1 \quad \text{ou} \quad (a-n) = (a+n) = -1.$$
   Or $a + n > 0$, donc
$$1 = (a-n) = (a+n) \quad \Longrightarrow \quad 2n = 0 \quad \Longrightarrow \quad n = 0.$$
   Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $n \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

Exercice [5 points]

1. Dans l'ensemble $E = \{1;2;3;4;5;6;7\}$, on considère les quatre sous-ensembles
$$A = \{1;2;3;4\}, \qquad B = \{3;4;6;7\}, \qquad C = \{1;3;5;7\} \qquad \text{et} \qquad D = \{2;3;4;5;6\}.$$
   (a) Déterminer les ensembles suivants : $(A \cap B) \cup (C \cap D)$, $(A \cap B) \times (C \cap D)$, $\mathscr{P}(A^c)$.

   Solution :
   - $(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{3,4\} \cup \{3,5\} = \{3,4,5\}$.
   - $(A \cap B) \times (C \cap D) = \{3,4\} \times \{3,5\} = \{(3,3),(3,5),(4,3),(4,5)\}$
   - $\mathscr{P}(A^c) = \mathscr{P}(\{5,6,7\}) = \{\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{6,7\}, A^c\}$

   (b) Donner une partition de $(A \cap B) \times (C \cap D)$ contenant exactement 3 sous-ensembles notés P_1, P_2 et P_3.
   Solution : Il suffit de choisir par exemple : $P_1 = \{(3,3)\}$, $P_2 = \{(3,4)\}$ et $P_3 = \{(4,3),(4,5)\}$
2. Soit E un ensemble, soit A, B et C trois parties de E. Démontrer que :
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$
   Solution : On a
$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) \quad & \Longleftrightarrow \quad x \in A \text{ et } x \in (B \cup C) \\ & \Longleftrightarrow \quad x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ & \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{\text{par distributivité de} \\ \textbf{et} \text{ par rapport à } \textbf{ou}}} \quad (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \\ & \Longleftrightarrow \quad x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C \\ & \Longleftrightarrow \quad x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$
   Par conséquent
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$