CY TECH	**Préing 2 : DS 1 (sujet 1) d'Analyse dans $\mathbb{R}^n$**	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.	*Date :* **Lundi 13 Novembre 2023** *Durée :* **1h** *Nombre de pages :* **1 page recto**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. *Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1 : Questions de cours/TD (4.5 points)

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé quelconque. Soit $r > 0$ et a un point quelconque de E. Montrer que la boule fermée de centre a et de rayon r, $\overline{B}(a, r)$, est un fermé.

Correction :

On doit donc étudier si le complémentaire de $\overline{B}(a, r)$ est un ouvert. On commence par introduire, en un point X quelconque de $C_E\overline{B}(a, r)$, la boule ouverte $B(X, r' = \|X - a\| - r)$. Comme $X \in C_E\overline{B}(a, r)$, $\|X - a\| > r$ et donc $r' = \|X - a\| - r > 0$.

Vérifions maintenant que $B(X, r' = \|X - a\| - r) \subset C_E\overline{B}(a, r)$:

Soit $Y \in B(X, r' = \|X - a\| - r)$ un point quelconque de $B(X, r' = \|X - a\| - r)$. Alors

$$\begin{aligned}
&\|X - a\| = \|X - Y + Y - a\| \leq \|X - Y\| + \|Y - a\| \\
&\iff -\|Y - a\| \leq \|X - Y\| - \|X - a\| \\
&\iff -\|Y - a\| < \|X - a\| - r - \|X - a\| \\
&\iff \quad \|Y - a\| > r
\end{aligned}$$

On voit donc que Y est bien extérieur à $\overline{B}(a, r)$, donc $Y \in C_E\overline{B}(a, r)$. Comme cela est vrai pour n'importe quel $Y \in B(X, r' = \|X - a\| - r)$, cela signifie que $B(X, r' = \|X - a\| - r) \subset C_E\overline{B}(a, r)$. Donc $C_E\overline{B}(a, r)$ est un ouvert et donc $\overline{B}(a, r)$ est un fermé.

0.5 point si l'étudiant indique que $\overline{B}(a, r)$ est fermé si et seulement si $C_E\overline{B}(a, r)$ ouvert.
1 point si c'est le bon rayon de boule r' qui est donné.
1 point si il est justifié que $r' > 0$.
1 point si il est correctement démontré que $\|Y - a\| > r$.
1 point pour conclure correctement à partir du point précédent.

Exercice 2 : 2 normes sur $\mathbb{R}^2$ (9 points)

Soit les deux applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$

$$N_1(x,y) = |3x+y| + |x+y| \qquad \text{et} \qquad N_2(x,y) = \frac{1}{2}|x| + |y|$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$. (4.5 points)
2. Que signifie que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes ? (1 point)
3. Ces normes sont-elles équivalentes ? (0.5 point)
4. Tracer la sphère associée à la norme N_1 de centre $(0,0)$ et de rayon $r=1$. (3 points)

Correction :

1. Pour N_1 :
   (a) Soit $N_1(x,y)=0$. Alors

$$|3x+y| + |x+y| = 0 \iff \begin{cases} 3x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x=0 \\ y=-x \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

   Finalement $N_1(x,y)=0 \Longrightarrow x=y=0$.

   1 point si et seulement si toutes les étapes précédentes sont présentes.
   0 s'il n'y a pas le système d'équation.

   (b) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors calculons la norme de $(\lambda x, \lambda y)$:

$$N(\lambda x,\lambda y) = |\lambda(3x+y)| + |\lambda(x+y)| = |\lambda|(|3x+y|+|x+y|) = |\lambda| N(x,y)$$

   0.5 point.

   (c) Considérons maintenant (x,y) et (x',y'). Et introduisons le vecteur

$$(x,y)+(x'+y') = (x+x', y+y') \tag{1}$$

   Et calculons maintenant sa norme

$$\begin{aligned} N_1(x+x',y+y') = |3x+3x'+y+y'| + |x+x'+y+y'| &\leq |3x+y|+|3x'+y'|+|x+y|+|x'+y'| \\ &\leq N(x,y)+N(x',y') \end{aligned}$$

   1 point.

   Finalement N_1 est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

   Pour N_2 :

   (a) $N_2(x,y)=0 \Longrightarrow x=y=0$ 0.5 point

(b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors calculons la norme de $(\lambda x, \lambda y)$:

$$N_2(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{2}|\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda| \left(\frac{1}{2}|x| + |y| \right) = |\lambda| N_2(x, y)$$

0.5 point

(c) Considérons maintenant (x, y) et (x', y'). Et introduisons le vecteur

$$(x, y) + (x' + y') = (x + x', y + y') \tag{2}$$

Et calculons maintenant sa norme

$$N_2(x + x', y + y') = \frac{1}{2}|x + x'| + |y + y'| \leq \frac{1}{2}|x| + |y| + \frac{1}{2}|x'| + |y'| = N_2(x, y) + N_2(x', y')$$

1 point

Donc N_2 est bien une norme.

2. N_1 et N_2 sont des normes équivalentes sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$\exists \alpha, \beta > 0 \ / \ \forall X \in \mathbb{R}^2, \ \alpha N_1(X) \leq N_2(X) \leq \beta N_1(X)$$

1 point s'il n'y a aucune ambiguité.
0.5 point pour la moindre ambiguité.
0 point pour la moindre erreur.

3. Ces normes sont nécessairement équivalentes puisque $\mathbb{R}^2$ est un espace de dimension 2. Or on sait que sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

0.5 point.
0 s'il n'y a pas de justification ou que la justification est fausse ou partiellement fausse.

4. On souhaite maintenant trouver la sphère de rayon 1 et de centre $(0, 0)$ associée à la norme N_1. Par définition, la sphère $S((0, 0), r = 1)$ est donnée par

$$S\Big((0, 0), r = 1\Big) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / N_1(x, y) = 1\Big\}$$

Ainsi, la sphère est obtenue en résolvant l'équation

$$|3x + y| + |x + y| = 1 \tag{3}$$

0.5 point si l'équation précédente et/ou $S((0, 0), r = 1)$ sont correctement écrits.

Cas 1 :
Partons du principe que

$$\begin{cases} 3x + y > 0 \\ x + y > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y > -3x \\ y > -x \end{cases}$$

Alors l'équation (3) devient

$$3x + y + x + y = 1 \iff 4x + 2y = 1 \iff y = \frac{1}{2} - 2x \quad \text{0.5 point}$$

Cas 2 :
Partons du principe que

$$\begin{cases} 3x + y < 0 \\ x + y > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y < -3x \\ y > -x \end{cases}$$

Alors l'équation (3) devient

$$-3x - y + x + y = 1 \iff -2x = 1 \iff x = -1/2 \quad \text{0.5 point}$$

Cas 3 :
Partons du principe que

$$\begin{cases} 3x + y > 0 \\ x + y < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y > -3x \\ y < -x \end{cases}$$

Alors l'équation (3) devient

$$3x + y - x - y = 1 \iff 2x = 1 \iff x = 1/2 \quad \text{0.5 point}$$

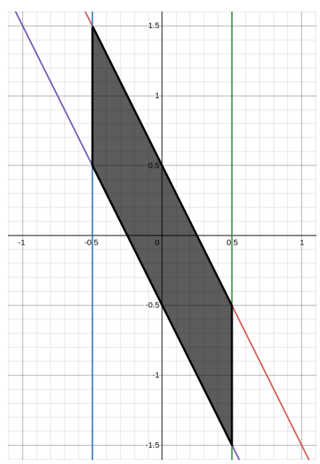
Cas 4 :
Partons du principe que

$$\begin{cases} 3x + y < 0 \\ x + y < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y < -3x \\ y < -x \end{cases}$$

Alors l'équation (3) devient

$$-3x - y - x - y = 1 \iff -4x - 2y = 1 \iff y = -\frac{1}{2} - 2x \quad \text{0.5 point}$$

Finalement la sphère correspond au contour noir du dessin ci-dessous :
0.5 point pour le dessin



Exercice 4 : un peu de topologie dans $\mathbb{R}$ (6.5 points)

On munit $\mathbb{R}$ de sa norme usuelle $|\cdot|$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit les ensembles suivants

$$I_1 =]a; b] \qquad I_2 = ([-1; 1[\cap]0; 2]) \cup \{3\}$$

1. Déterminer si les ensembles précédents sont ouverts, fermés, ou aucun des deux en passant soit en utilisant directement les définitions soit en utilisant les suites d'éléments de $\mathbb{R}$. (2.5 points)

On commence par I_1 :

Fermé ? (exemple de méthode)

Soit la suite $u_n = a + \frac{1}{n}$. Alors

$$a + \frac{1}{n} \leq b \Longleftrightarrow n \geq \frac{1}{b-a}$$

Posons n_0 le plus petit entier tel que $n_0 \geq 1/(b-a)$. Ainsi

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \in I_1$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \notin I_1$$

donc I_1 n'est pas un fermé.

0.5 point, s'il est précisé qu'à partir d'un certain rang, u_n est une suite d'élément de I_1.
0.25, si c'est juste mais que ce n'est pas précisé.

Seule autre méthode acceptée :
prendre le complémentaire de I_1 dans $\mathbb{R}$ et montrer qu'en $\{a\}$ aucune boule ne peut être incluse dans le complémentaire.

Ouvert ? (exemple de méthode)

Nous allons cette fois-ci utiliser les boules. Il semble y avoir un problème en b.

Soit $r > 0$. Soit $B(b, r) =]b-r; b+r[$ la boule ouverte centrée en b et de rayon r. Considérons alors $y = b + \frac{r}{2} \in B(b, r)$. Or clairement $\forall r > 0,\ y > b$. Donc $\forall r > 0$, $y \notin I_1$. Donc $\forall r > 0$, $B(b, r) \not\subset I_1$. Donc I_1 n'est pas un ouvert.

0.5 point si c'est bien fait $\forall r > 0$.

Seule autre méthode acceptée :
On prend le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de I_1 et on montre grâce aux suites que ce complémentaire n'est pas un fermé.

On poursuit avec I_2 :

$I_2 =]0; 1[\cup \{3\}$ (0.5 point)

Fermé ? (exemple de méthode)

Clairement il y a un problème en $\{0\}$ et en $\{1\}$.

Soit $u_n = \frac{1}{n}$. Alors

$$\forall n \geq 2,\ u_n \in I_2$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \notin I_2$$

et finalement I_2 n'est pas fermé.

0.5 point, s'il est précisé qu'à partir d'un certain rang, u_n est une suite d'élément de I_2.
0.25, si c'est juste mais que ce n'est pas précisé.

Seule autre méthode acceptée :
prendre le complémentaire de I_2 dans $\mathbb{R}$ et montrer qu'en $\{0\}$ aucune boule ne peut être incluse dans le complémentaire.

Ouvert ? exemple de méthode

On va utiliser cette fois-ci les boules ouvertes.

Soit $r > 0$. Soit $B(3, r) =]3-r; 3+r[$ la boule ouverte centrée en 3 et de rayon r. Considérons alors $y = 3 + \frac{r}{2} \in B(b, r)$. Or clairement $\forall r > 0,\ y > 3$. Donc $\forall r > 0$, $y \notin I_2$. Donc $\forall r > 0$, $B(3, r) \not\subset I_2$. Donc I_2 n'est pas un ouvert.

0.5 point si c'est bien fait $\forall r > 0$.

Seule autre méthode acceptée :
On prend le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de I_2 et on montre grâce aux suites que ce complémentaire n'est pas un fermé.

2. Déterminer l'intérieur de I_1 et l'adhérent de I_2 par la méthode de votre choix. (4 points)

On commence par I_1 :

Intérieur de $\mathring{I}_1$:

Etape 1 (0.5 point) : proposons un candidat sur la base du fait que l'intérieur de I_1 est le plus grand ouvert contenu dans I_1. Ainsi, posons

$$C =]a, b[$$

Etape 2 (0.5 point) : Nous devons vérifier que C est bien un ouvert et que $C \subset I_1$.

$$C =]a, b[= B\left(\frac{a+b}{2}, r = \frac{b-a}{2}\right)$$

Donc C est bien un ouvert car il s'agit d'une boule ouverte.

De plus $I_1 = C \cup \{b\}$ ce qui implique que $C \subset I_1$.

D'après le TD, on sait alors que $C \subset \mathring{I}_1$.

Etape 3 (1 point) : Nous devons maintenant vérifier que $\mathring{I}_1 \subset C$.

$$\mathring{I}_1 \subset C \iff \Big(\forall x \in I_1 \backslash C, \forall r > 0, B(x, r) \not\subset I_1\Big)$$

Ici $I_1 \backslash C = \{b\}$.

Soit $r > 0$ et soit $B(b, r) =]b - r; b + r[$ la boule centrée en b et de rayon r. Considérons alors $y = b + \frac{r}{2} \in B(b, r)$. Or, $\forall r > 0$, $y > b$ donc $y \notin I_1$. Ainsi $\forall r > 0$, $B(b, r) \not\subset I_1$ et on a donc $\mathring{I}_1 \subset C$.

Finalement : $\mathring{I}_1 = C =]a, b[$.

<u>Détermination de $\overline{I}_2$:</u>
De la même façon il faut proposer un candidat $C = [0; 1] \cup \{3\}$ (0.5 point).

Puis on vérifie que $I_2 \subset C$ et que C est un fermé. On sait alors que $\overline{I}_2 \subset C$ (0.5 point).

Il ne reste plus qu'à montrer que $C \subset \overline{I}_2$ ce qui est équivalent à

$$\forall x \in C \backslash I_2,\ \forall r > 0,\ B(x, r) \cap I_2 \neq \emptyset$$

où dit autrement que tous les points de $C \backslash I_2$ appartiennent bien à $\overline{I}_2$.

Or ici $C \backslash I_2 = \{0\} \cup \{1\}$. On peut par exemple introduire les suites

$$u_n = \frac{1}{n} \qquad v_n = 1 - \frac{1}{n}$$

Il existe pour chacune des suites un rang à partir duquel tous les éléments de la suite appartiennent à I_2. Or

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} v_n = 1$$

Donc $\{1\}$ et $\{2\}$ appartiennent à $\overline{I}_2$. (1 point)

On a donc $\overline{I}_2 = C = [0; 1] \cup \{3\}$.

0.5 si $\mathring{I}_1$ est donné sans justificatif ou que le reste de la démonstration est faux.
0.5 si $\overline{I}_2$ est donné sans justificatif ou que le reste de la démonstration est faux.