CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 1** **Analyse I**	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **Jeudi 10 Novembre 2022** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 6 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

$\diamond \diamond \diamond$

Exercice 1 (4 points) : Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $\tan x = 2\sin x$. (2 points)

   Solution : Il faut d'abord préciser l'ensemble de définition de l'équation. C'est celui de la tangente, c'est-à-dire
   $$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$
   Pour tout $x \in D$, nous avons
   $$\begin{aligned} \tan x = 2\sin x &\iff \frac{\sin x}{\cos x} = 2\sin x \\ &\iff \sin x = 2\sin x\cos x \\ &\iff \sin x = \sin(2x). \\ &\iff 2x = x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad 2x = \pi - x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$
   Ainsi, l'ensemble solution est donné par
   $$\left\{ 2k\pi,\ \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. $\cos x + \sin x = 1 + \tan x$. (2 points)

   Solution : Il faut d'abord préciser l'ensemble de définition de l'équation. C'est celui de la tangente, c'est-à-dire
   $$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pour tout $x \in D$, nous avons

$$\begin{aligned}
\cos x + \sin x = 1 + \tan x &\iff \cos x + \sin x = 1 + \frac{\sin x}{\cos x} \\
&\iff \cos x + \sin x = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} \\
&\iff \cos^2 x - \cos x + \cos x \sin x - \sin x \\
&\iff \cos x(\cos x - 1) + \sin x(\cos x - 1) = 0 \\
&\iff (\cos x - 1)(\cos x + \sin x) = 0 \\
&\iff \cos x = 1 \quad \text{ou} \quad \cos x = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\
&\iff x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\iff x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble solution est donné par

$$\left\{2k\pi,\ -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Exercice 2 (4 points) :

1. Démontrer les égalités suivantes :

(a) $E(-x) = \begin{cases} -E(x) & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \\ -E(x) - 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$ (1 point)

(b) $E(2x) = \begin{cases} 2E(x) & \text{si } x - E(x) < \frac{1}{2}, \\ 2E(x) + 1 & \text{si } x - E(x) \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$ (1.5 points)

Solution :

(a) On a :

- si $x \in \mathbb{Z}$, alors $E(x) = x$ et $E(-x) = -x$.
- si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors

$$E(x) < x < E(x) + 1.$$

Donc

$$-E(x) - 1 < -x < -E(x).$$

Ce qui nous permet de conclure

$$E(-x) = -E(x) - 1.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq x - E(x) < 1.$$

Ainsi, on a deux cas à étudier.

- Si $0 \leq x - E(x) < 1/2$ alors

$$E(x) \leq x < E(x) + \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2E(x) \leq 2x < 2E(x) + 1.$$

Or $E(2x)$ est le plus grand entier inférieur ou égale à $2x$, par conséquent

$$E(2x) = 2E(x).$$

- Si $1/2 \leq x - E(x) < 1$ alors

$$E(x) + \frac{1}{2} \leq x < E(x) + 1 \quad \Longrightarrow \quad 2E(x) + 1 \leq 2x < 2E(x) + 2 = (2E(x) + 1) + 1.$$

Or $E(2x)$ est le plus grand entier inférieur ou égale à $2x$, par conséquent

$$E(2x) = 2E(x) + 1.$$

2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: (1.5 points)

$$E(2x) = 5 + E(-x).$$

Solution : Nous avons trois cas à étudier

- Si $x \in \mathbb{Z}$, nous avons
$$E(2x) = 2x \quad \text{et} \quad E(-x) = -x.$$
Par conséquent
$$\begin{aligned} E(2x) = 5 + E(-x) &\Longleftrightarrow 2x = 5 + -x \\ &\Longrightarrow 3x = 5 \\ &\Longrightarrow x = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$
Or x est un entier, ainsi sur $\mathbb{Z}$, l'équation n'admet pas de solution.
- Si $0 < x - E(x) < 1/2$, nous avons
$$E(2x) = 2E(x) \quad \text{et} \quad E(-x) = -E(x) - 1$$
Par conséquent
$$\begin{aligned} E(2x) = 5 + E(-x) &\Longleftrightarrow 2E(x) = 5 - E(x) - 1 \\ &\Longrightarrow 3E(x) = 4 \\ &\Longrightarrow E(x) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$
Or $E(x)$ est un entier, ainsi sur l'ensemble des réels vérifiant $0 < x - E(x) < 1/2$, l'équation n'admet pas solution.

- Si $1/2 \leq x - E(x) < 1$, nous avons
$$E(2x) = 2E(x) + 1.$$
Par conséquent
$$\begin{aligned} E(2x) = 5 + E(-x) &\Longleftrightarrow 2E(x) + 1 = 5 - E(x) - 1 \\ &\Longrightarrow 3E(x) = 3 \\ &\Longrightarrow E(x) = 1 \\ &\Longrightarrow x \in [1, 2[\end{aligned}$$
Ainsi, sur $1/2 \leq x - E(x) < 1$, l'ensemble solution est donné par l'intervalle
$$\left[\frac{3}{2}, 2\right[.$$

Exercice 3 (4 points) : Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $|x-1| \leq |2x+1|+1$. (2 points)

Solution : Nous avons

$$|x-1| \leq |2x+1|+1 \quad \Longleftrightarrow \quad -|2x+1|-1 \leq x-1 \leq |2x+1|+1.$$

Deux cas à étudier.

$2x+1 \geq 0$: alors

$$\begin{aligned}
-|2x+1|-1 \leq x-1 \leq |2x+1|+1 &\Longleftrightarrow -(2x+1)-1 \leq x-1 \leq (2x+1)+1 \\
&\Longleftrightarrow -2x-2 \leq x-1 \leq 2x+2 \\
&\Longleftrightarrow -2x-2 \leq x-1 \quad \text{et} \quad x-1 \leq 2x+2 \\
&\Longleftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \quad \text{et} \quad -3 \leq x.
\end{aligned}$$

Ainsi, dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, l'ensemble solution est donné par

$$\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[.$$

$2x+1 < 0$: alors

$$\begin{aligned}
-|2x+1|-1 \leq x-1 \leq |2x+1|+1 &\Longleftrightarrow (2x+1)-1 \leq x-1 \leq -(2x+1)+1 \\
&\Longleftrightarrow 2x \leq x-1 \leq -2x \\
&\Longleftrightarrow 2x \leq x-1 \quad \text{et} \quad x-1 \leq -2x \\
&\Longleftrightarrow x \leq -1 \quad \text{et} \quad x \leq \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi, dans l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$, l'ensemble solution est donné par

$$\left]-\infty, -1\right].$$

Par conséquent, l'ensemble solution est donné par

$$\left]-\infty, -1\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[.$$

2. $\sqrt{|x+2|} \leq |x-4|$. (2 points)

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt{|x+2|} \leq |x-4| &\Longleftrightarrow |x+2| \leq (x-4)^2 = x^2-8x+16 \\
&\Longleftrightarrow -x^2+8x-16 \leq (x+2) \leq x^2-8x+16 \\
&\Longleftrightarrow -x^2+8x-16 \leq (x+2) \quad \text{et} \quad (x+2) \leq x^2-8x+16 \\
&\Longleftrightarrow -x^2+7x-18 \leq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq x^2-9x+14 \\
&\Longleftrightarrow -x^2+7x-18 \leq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq (x-2)(x-7).
\end{aligned}$$

Or $-x^2+7x-18$ ne possède pas de racines réels. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x^2+7x-18 \leq 0.$$

Ainsi

$$\sqrt{|x+2|} \leq |x-4| \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq (x-2)(x-7)$$

et l'ensemble solution est donné par

$$]-\infty, 2] \cup [7, +\infty[.$$

Exercice 4 (4 points) : Calculer les sommes et les produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)$. (1.5 points)

Solution :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1-k}.$$

On effectue ensuite le changement d'indices $j=n+1-k$ dans la deuxième somme. On a

$$1\leq k\leq n \implies -1\geq -k\geq -n \implies n\geq n+1-k\geq 1 \implies n\geq j\geq 1.$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1-k}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$$

Par conséquent

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}=0.$$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}}\binom{n}{k}$. (1 point)

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}}\binom{n}{k} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2^{2k}}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{-1}{4}\right)^k\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}1^{n-k}\cdot\binom{n}{k}\left(\frac{-1}{4}\right)^k\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)^n=\frac{3^n}{2^{2n+1}}.\end{aligned}$$

3. Simplifier le produit $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$. (1.5 points)

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}\\ &= \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k}\\ &= \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

Exercice 5 (6 points) : On considère les ensembles A et B suivants

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\{1\} : \frac{2}{x-1}\leq 2x-5<11\right\} \quad ; \quad B=\left\{\frac{(-1)^n}{n}+\frac{2}{n} : n\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

1. Les ensembles A et B sont-ils majorés, minorés ? Justifier votre réponse. (1.5 points par ensemble)

   Solution : Commençons par étudier l'ensemble A. Nous avons

$$\begin{aligned} x \in A \iff \frac{2}{x-1} \leq 2x-5 < 11 &\iff 0 \leq \frac{(2x-5)(x-1)-2}{x-1} \quad \text{et} \quad x < 8 \\ &\iff 0 \leq \frac{2x^2-7x+3}{x-1} \quad \text{et} \quad x < 8 \\ &\iff 0 \leq \frac{(2x-1)(x-3)}{x-1} \quad \text{et} \quad x < 8 \end{aligned}$$

   En faisant un tableau de signe, nous pouvons conclure que

$$x \in A \iff x \in \left(\left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup [3, +\infty[\right) \cap]-\infty, 8[.$$

   Ainsi

$$A = \left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup [3, 8[.$$

   Par conséquent, A est majorée par tout réel supérieur ou égal à 8, et A est minorée par tout réel inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$.

   Etudions maintenant l'ensemble B. On commence par noter que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons
   - si n est pair, alors

$$(-1)^n = 1 \implies \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} = \frac{3}{n} \implies 0 < \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} \leq \frac{3}{2}.$$

   - si n est impair, alors

$$(-1)^n = -1 \implies \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} = \frac{1}{n} \implies 0 < \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} \leq 1.$$

   Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 < \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} \leq \frac{3}{2}.$$

   Par conséquent, B est majorée par tout réel supérieur ou égal à $\frac{3}{2}$, et B est minorée par tout réel inférieur ou égal à 0.

2. Pour chaque ensemble A et B déterminer, s'il existe, les bornes supérieure et inférieure ainsi que le plus grand et le plus petit élément. Justifier votre réponse. (1.5 points par ensemble)

   Solutions : Commençons par étudier l'ensemble A. D'après la question précédente, nous avons

$$A = \left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup [3, 8[.$$

   Donc

$$\sup A = 8 \quad \text{et} \quad \min A = \inf A = \frac{1}{2}.$$

   Étudions maintenant l'ensemble B. D'après la question précédente, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 < \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} \leq \frac{3}{2}.$$

   Or

$$\frac{3}{2} = \frac{(-1)^2}{2} + \frac{2}{2} \implies \frac{3}{2} \in B.$$

Ainsi, $\frac{3}{2}$ est un majorant de B qui appartient à B. Ce qui nous permet de conclure

$$\max(B) = \sup(B) = \frac{3}{2}.$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} \geq \inf(B).$$

Donc par passage à la limite, on obtient

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} \geq \lim_{q \to +\infty} \inf(B) = \inf(B).$$

Or, on sait que $0 \leq \inf(B)$. Par conséquent

$$\inf(B) = 0.$$

Notons que $0 \notin B$, donc B ne possede pas de minimum.

Exercice 6 (3 points) : Soit A un sous-ensemble non vide et borné de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On définit

$$x + A = \{x + a : \; x \in A\}.$$

Montrer que $A + x$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ (1 point) et que

$$\sup(x + A) \; = \; x + \sup(A). \quad \text{(2 points)}$$

Solution : Puisque A et majoré et non vide, il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $a \in A$, nous avons

$$a \leq M \quad \Longrightarrow \quad a + x \leq M + x.$$

Par conséquent, $A + x$ est majorée et il admet une borne supérieure. Montrons

$$\sup(A + x) \; = \; \sup(A) + x$$

par double inégalité. Soit $a \in A$, alors

$$a \leq \sup(A) \quad \Longrightarrow \quad a + x \leq \sup(A) + x.$$

Ainsi $A + x$ est majorée par $\sup(A) + x$. On en déduit que

$$\sup(A + x) \leq \sup(A) + x.$$

Maintenant, pour tout $a \in A$, on a

$$a + x \leq \sup(A + x) \quad \Longrightarrow \quad a \leq \sup(A + x) - x.$$

D'où on déduit que $\sup(A+x)-x$ est un majorant de A. Puisque $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A, nous pouvons écrire

$$\sup(A) \leq \sup(A + x) - x \quad \Longrightarrow \quad \sup(A) + x \leq \sup(A + x).$$

Puisque

$$\sup(A) + x \leq \sup(A + x) \quad \text{et} \quad \sup(A) + x \geq \sup(A + x)$$

on obtient

$$\sup(A + B) = \sup(A) + x.$$