



## Préing 2 Devoir Surveillé 1

Matière : Analyse dans  $\mathbb{R}^n$   
L'usage de tout appareil électronique est interdit

Date : Jeudi 10 Novembre 2022  
Durée : 1h30  
Nombre de pages : 2

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.  
Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.



### Exercice 1. (5,5 points)

1. On considère l'ensemble suivant :

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

- (a) Montrer que  $\bar{A} = \emptyset$  et que  $A$  n'est pas un fermé.  
(b) Déterminer le complémentaire dans  $\mathbb{R}$  de  $A \cup \{0\}$ . En déduire que  $A \cup \{0\}$  est un fermé.  
(c) Déterminer l'adhérent de  $A$ .
2. Donner la définition d'une distance sur l'ensemble  $X$ .
3. Soit  $d$  une distance sur l'ensemble  $X$ , et  $\delta$  une application définie par

$$\begin{aligned} \delta : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \delta(x, y) = \min(d(x, y), 2) \end{aligned}$$

Montrer que  $\delta$  est une distance sur l'ensemble  $X$ .

### Exercice 2. (3,5 points)

On note  $E$  l'espace vectoriel de toutes les fonctions de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ . On définit l'application  $N$  par

$$\forall f \in E, \quad N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t) + f(t)| dt$$

Montrer que  $N$  est une norme sur  $E$ .

### Exercice 3. (7 points)

1. On définit l'application  $\vartheta$  par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \vartheta(x, y) = \max\{|3x - y|; |5x + y|\}$$

Montrer que  $\vartheta$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. En déduire que  $\vartheta$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont équivalentes.
3. Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \vartheta(x, y) \leq 6\|(x, y)\|_\infty$ .
4. Soit  $B_1$  la boule unité fermée dans  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$  et  $B_2 = \overline{B}((0, 0), 6)$  la boule fermée dans  $(\mathbb{R}^2, \vartheta)$ . Montrer que  $B_1 \subset B_2$ .
5. Dessiner la boule unité fermée dans  $(\mathbb{R}^2, \vartheta)$ .

**Exercice 4.** ( 6 points) - On considère les ensembles suivants :

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |3x - y| \leq 1, |y + 5x| \leq 1\}$ .
- $B = ]-3, -2[ \cup ]2, 3[ \cup \{4\}$ .

1. Les ensembles  $A$  et  $B$  sont-ils fermés, ouverts, ni fermés ni ouverts? Justifier votre réponse.
2. Pour chaque ensemble  $A$  et  $B$  déterminer l'intérieur, l'adhérence. Justifier votre réponse.