	Préing 1 **Devoir Surveillé 4**	
	Matière : **Analyse** ***Le barème est donné à titre indicatif.***	*Date :* **Jeudi 9 mars 2023** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
L'usage de tout appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.
Le sujet comporte **5** *exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1. (4 points)

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'ensemble proposé.

1. Sur $\mathbb{R} \setminus \{1\},\ f(x) = \sin(x^2 + 4x + \frac{1}{x-1})$.
2. Sur $\mathbb{R},\ g(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+3}$.

Exercice 2. (4 points)

1. Soit la fonction $g(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et $n \in \mathbb{N}$.
   Déterminer l'expression de la dérivée $g^{(n)}(x)$ (la dérivée n-ième de g).
2. Déterminer la limite en 0 de $\frac{1+\ln(x+1)-e^x}{1-\cos(x)}$.

Exercice 3 (4 points)**.** On considère la fonction $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{e^x}{x^e}$.

1. Montrer que f vérifie la relation suivante : $x \cdot f'(x) = (x - e) \cdot f(x)$ pour tout $x > 0$.
2. Etudier la variation de f.
3. Montrer que f possède un minimum et donner la valeur de f en ce minimum.

Exercice 4. (6 points)

Soit f une fonction réelle à valeurs réelles définie par

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sin(x) + \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer les conditions sur a, b et c pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $f'(x)$ et déterminer les conditions sur a, b et c pour que f' soit continue sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $f''(x)$ et déterminer les conditions sur a, b et c pour que f'' soit continue sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $f^{(3)}(x)$. Est-ce que $f^{(3)}(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$?
5. Est-ce que f est de classe C^2 ?. Est-ce que f est de classe C^3 ?

Exercice 5. (6 points)

1. Rappeler le théorème des accroissements finis appliqué à une fonction f sur le segment $[a, b]$.
2. A l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z}$ sur le segment $[x, x+1]$ pour $x > 0$, montrer que

$$\frac{-1}{x^2} < \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} < \frac{-1}{(x+1)^2},$$

3. En déduire la limite en 0^+ de la fonction $\exp(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x})$.