	Préing 1 **Devoir Surveillé 1** **Algèbre I**
L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **Lundi 25 Octobre 2021** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 6 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

⋄ ⋄ ⋄

Exercice 1
Dans l'ensemble $E = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$, on considère les trois sous-ensembles

$$A = \{1;3;5\} \qquad B = \{1;2;3;4;5;6\} \qquad \text{et} \qquad C = \{5;6;7\}.$$

1. Déterminer les ensembles suivants : $B \setminus A$; $A^c \cup (B \cap C)$; $\mathscr{P}(A)$.
2. Donner une partition de E contenant exactement 3 sous-ensembles notés A_1, A_2, A_3.

Solution :

1.

$$\begin{array}{rcl} B \setminus A & = & \{2;4;6\} \\ A^c \cup (B \cap C) & = & \{0;2;4;6;7\} \cup \{5,6\} = \{0;2;4;5;6;7\} \\ \mathscr{P}(A) & = & \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, A\}. \end{array}$$

2. Nous pouvons par exemple choisir

$$\{\{0;1\};\{2;3;4;5;6\};\{7\}\}.$$

Exercice 2
Soient P, Q et R des propositions. Montrer l'équivalence suivante :

$$\big(P \implies (Q \implies R)\big) \iff \big((P \text{ et } Q) \implies R\big)$$

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} P \implies (Q \implies R) &\iff \text{non}(P) \text{ ou } (Q \implies R) \\ &\iff \text{non}(P) \text{ ou } (\text{non}(Q) \text{ ou } R) \\ &\iff (\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)) \text{ ou } R \\ &\iff \text{non}(P \text{ et } Q) \text{ ou } R \\ &\iff (P \text{ et } Q) \implies R. \end{aligned}$$

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Donner la négation de : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \implies x = 0 \text{ ou } x \geq 5$.
2. On considère la proposition $\mathscr{P}$: "f est périodique".
   (a) Traduire mathématiquement $\mathscr{P}$.
   (b) Donner la négation de $\mathscr{P}$.

Solution :

1. $$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \text{ et } x \neq 0 \text{ et } x < 5.$$
2. (a) $$\exists T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$$
   (b) $$\forall T \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x+T) \neq f(x).$$

Exercice 4

1. Montrer que pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$
$$a + b + c = 0 \quad \implies \quad (a \leq 0 \text{ ou } b \leq 0 \text{ ou } c \leq 0).$$
2. Soit un entier $n > 0$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Solution :

1. On raisonne par contraposition. Nous devons montrer
$$(a > 0 \text{ et } b > 0 \text{ et } c > 0) \quad \implies \quad a + b + c \neq 0.$$

Supposons

$$a > 0 \quad ; \quad b > 0 \quad ; \quad c > 0.$$

En additionant les trois inéquations on obtient

$$a + b + c > 0 \quad \Longrightarrow a + b + c \neq 0.$$

2. On raisonne par l'absurde. Supposons que n et $2n$ sont le carré d'un entier, c'est-à-dire, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n = p^2 \quad \text{et} \quad 2n = q^2.$$

Alors

$$2 = \frac{2n}{n} = \frac{p^2}{q^2} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Absurde. Par conséquent, $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 5

1. Enoncer le principe de récurrence double.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$u_n = (-2)^n + 3^n.$$

Solution :

1. **Récurrence Double** : On considère une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :
   — $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vrais,
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vrais, alors $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
   Alors la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. — **Initialization :** Nous avons

$$u_0 = 2 = (-2)^0 + 3^0 \quad ; \quad u_1 = 1 = (-2)^1 + 3^1.$$

La propositon et ainsi vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

— **Heredite :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons

$$u_n = (-2)^n + 3^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = (-2)^{n+1} + 3^{n+1}.$$

Montrons

$$u_{n+2} = (-2)^{n+2} + 3^{n+2}.$$

Nous avons

$$\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & u_{n+1} + 6u_n \\ & = & (-2)^{n+1} + 3^{n+1} + 6\big((-2)^n + 3^n\big) \\ & = & (-2)^{n+1} + 3^{n+1} - 3\cdot(-2)^{n+1} + 2\cdot 3^{n+1} \\ & = & (-2)^{n+1}(1-3) + 3^{n+1}(1+2) \\ & = & (-2)^{n+2} + 3^{n+2}. \end{array}$$

Ainsi, la proposition est vrai pour $n+2$.

Par conséquent, le principe de récurrence double nous permet de conclure que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0.$$

Exercice 6

Soit E et F deux ensembles, soit A, C deux parties de E et B, D deux parties de F.
Démontrer que

1. $A \subset C \iff \mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(C)$.
2. $A \Delta C \ = \ A^c \Delta C^c$.
3. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Solution :

1. On raisonne par double implication.
   $\Longrightarrow$ Supposons $A \subset C$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \forall D \in \mathscr{P}(A) & \Longrightarrow & D \subset A \subset C \\ & \Longrightarrow & D \subset C \\ & \Longrightarrow & D \in \mathscr{P}(C). \end{array}$$

   Ainsi, $\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(C)$.
   $\Longleftarrow$ Supposons $\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(C)$. Nous avons

$$\begin{array}{rcl} A \in \mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(C) & \Longrightarrow & A \in \mathscr{P}(C) \\ & \Longrightarrow & A \subset C. \end{array}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned}
A\Delta C &= (A\cup C)\setminus(A\cap C)\\
&= (A\cup C)\cap(A\cap C)^c\\
&= (A\cup C)\cap(A^c\cup C^c)\\
&= (A^c\cup C^c)\cap(A\cup C)\\
&= (A^c\cup C^c)\cap(A^c\cap C^c)^c\\
&= (A^c\cup C^c)\setminus(A^c\cap C^c)\\
&= A^c\Delta C^c.
\end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}
(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D) &\iff (x,y)\in A\times B \quad \text{et} \quad (x,y)\in C\times D\\
&\iff (x\in A \text{ et } y\in B) \text{ et } (x\in C \text{ et } y\in D)\\
&\iff (x\in A \text{ et } x\in C) \text{ et } (y\in B \text{ et } y\in D)\\
&\iff x\in A\cap C \text{ et } y\in B\cap D\\
&\iff (x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$$