CY TECH	**Préing 2** **Devoir Surveillé 1**	
	Matière : **Analyse dans $\mathbb{R}^n$** L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **Jeudi 18 Novembre 2021** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

♣ ♣ ♣

Exercice 1. (1+3 = 4 points) - Question de cours.

1. Donner la définition d'un espace séparé.
2. Montrer que tout espace vectoriel normé est un espace séparé.

Exercice 2. (3+3 = 6 points) - On considère les ensembles suivants :

- $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0, 1 \leq y \leq 2\right\}$.
- $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x-1| < 1, |y-1| < 1\right\} \cup \left\{(0,2; 0,5)\right\}$.
- $C =]-5, -1[\cup]0, 5] \cup \{6\}$.

1. Les ensembles A, B et C sont-ils fermés, ouverts, ni fermés ni ouverts ? Justifier votre réponse.
2. Pour chaque ensemble A, B et C déterminer l'intérieur, l'adhérence. Justifier votre réponse.

Exercice 3. (1,5+4+0,5 = 6 points) - On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel de toutes les suites réelles bornées. On définit les applications N_1, N_2 par

$$\forall x = (x_n)_n \in \mathcal{E} \quad , \quad N_1(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \quad \text{et} \quad N_2(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \left(\frac{2^n + 1}{2^n + 2} \right) \cdot x_n \right|$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{2^n+1}{2^n+2}$ est bornée, et trouver ses bornes $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}}(a_n)$ et $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}}(a_n)$. Est-ce que pour tout $x \in \mathcal{E}$, $N_2(x)$ existe ?
2. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathcal{E}$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que : $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$.

Exercice 4. (1+1+2+2 = 6 points) - Soit E un espace vectoriel et l'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \bullet \quad \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ \bullet \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\, \forall x \in E,\, \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \\ \bullet \quad \forall x, y \in E,\, \|x + y\| \leq \max\Big(\|x\|, \|y\|\Big) \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall x \in E$, on a $\|x\| \geq 0$.
2. Montrer que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.
3. Soit $\forall r > 0$, $\forall a \in E$. Montrer que $\Big[x \in B(a, r)\Big] \Longrightarrow \Big[B(a, r) = B(x, r)\Big]$.
4. Soit $\forall (r, \delta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\forall (x, y) \in E^2$. Montrer que

$$\Big[B(x, r) \cap B(y, \delta) \neq \emptyset\Big] \Longrightarrow \Big[B(x, r) \subset B(y, \delta) \quad \text{ou} \quad B(y, \delta) \subset B(x, r)\Big].$$

Indication : Pour la question 4, on pourra utiliser la question 3.