CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 1** **Algèbre II**	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date:* **Jeudi 24 Janvier 2022** *Durée:* **1h30** *Nombre de pages:* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 5 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

⋄ ⋄ ⋄

Exercice 1 [5 points]

1. Soit $(G,\star)$ un groupe. Montrer que H est un sous-groupe de $(G,\star)$, si et seulement si, H est non vide et pour tout x, y éléments de $H, x^{-1}\star y \in H$. 2.5 points

2. On note U l'ensemble de $\mathbb{C}$ suivant :
$$U = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$$
Montrer que $(U,.)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C},.)$. 2.5 points

Solution

1. Soit H une partie de G. Supposons que H est un sous-groupe de $(G,\star)$. Alors H est un groupe. Soit $(x;y) \in H^2$ alors $x^{-1} \in H$,(car H est un groupe) et donc $x \star y^{-1} \in H$ car H est stable. De plus $e \in H$.

   Réciproquement, supposons que pour tout $(x;y) \in H^2$, $x \star y^{-1} \in H$ et H non vide. Alors

   Soit $x \in H$, alors $xx^{-1} \in H$ donc $e \in H$ et $ex^{-1} = x^{-1} \in H$. On en déduit que $xy = xy^{-1^{-1}} \in H$ donc H est stable.

   On a donc un ensemble non vide, stable par l'opération, qui contient l'élément neutre, les inversibles et la loi est associative donc $(H,\star)$ est un groupe donc un sous-groupe.

2. Soit $(x, y) \in U$, alors l'inverse de y est $\dfrac{1}{y}$

   On vérifie si xy^{-1} appartient à U:

   $\left|xy^{-1}\right| = \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} = \dfrac{1}{1} = 1$

   donc $xy^{-1} \in U$ donc U est un sous-groupe de $\mathbb{C}$

   Autre méthode: 1 appartient U car |1|=1.

U est stable car pour $(x,y)\in U, |xy| = |x||y| = 1\times 1 = 1$

De plus l'inverse de y, $\frac{1}{y}$ est tel que $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|} = 1$ donc $y^{-1}\in U$.

Donc U est un sous-groupe de $\mathbb{C},\times)$

Autre méthode: module: $\begin{array}{l}\mathbb{C}\to\mathbb{R}^*\\ x\mapsto |z|\end{array}$ est un morphisme de groupe et U est le noyau de ce morphisme.

Exercice 2 [2 points]

Soit $(G,\star)$ un groupe et soit $a\in G$, tel qu'il existe un entier n, tel que $a^{n+1} = a\star a\star a\cdots\star a = e$, avec e l'élément neutre de $(G,\star)$. On note A l'ensemble

$$A = \left\{e, a, a^2, \dots, a^n\right\}$$

Montrer que $(A,\star)$ est un groupe commutatif.

Solution

Soit $(c,d)\in G^2$, soit $(m,p)\in [\![0,n]\!]^2$ tels que $c = a^m$ et $d = a^p$
alors $d^{-1} = a^{n+1-p}$ en effet $da^{n+1-p} = a^p a^{n+1-p} = a^{n+1} = e = a^{n+1-p}d$
On a donc $cd^{-1} = a^m a^{n+1-p} = a^{m+n+1-p}$
Or $0\leqslant m\leqslant n$ et $0\leqslant p\leqslant n$ donc $0\leqslant n-p\leqslant n$ donc $0\leqslant m+n-p\leqslant 2n$
Soit $k = m+n-p\leqslant n$ et $cd^{-1} = a^k$ avec $k\in[\![0,n]\!]$
Soit $m+n-p > n$ et alors $k = (m+n-p)-n = m-p\in[\![0,n]\!]$
Dans les deux cas $cd^{-1}\in A$
Enfin A est commutatif car $a^m a^p = a^{m+p} = a^{p+m} = a^p a^m$

Exercice 3 [6 points]

On note G l'ensemble de $\mathbb{R}_1[X]$ suivant

$$G = \{aX+b\in\mathbb{R}_1[X];\quad a\neq 0\}$$

Pour tous $P = aX+b$ et $Q = cX+d$, éléments de G, on note

$$P\star Q = acX + (ad+b)$$

1. Montrer que $\star$ est une LCI sur G. 1 points
2. Montrer que $(G,\star)$ est un groupe. 2.5 points
3. $(G,\star)$ est-il commutatif? 1 points
4. L'objectif de cette question est de construire un sous-groupe commutatif de $(G,\star)$. On fixe $k\in\mathbb{R}$ et on définit
$$A_k = \{aX + k(a-1)\in G\}.$$
Montrer que A_k est un sous-groupe commutatif de $(G,\star)$. 1 points

<u>Solution</u>

1. $P \star G$ est évidemment un opération interne de $\mathbb{R}_1[X]$.

   La loi est **interne sur G** car si $a \neq 0$ et $c \neq 0$, alors $ac \neq 0$ donc $(aX+b)\star(cX+d) \in G$

2. Associativité...

   $(aX+b)\star((cX+d)\star(eX+f)) = (aX+b)\star(ceX+(cf+d)) = aceX + a(cf+d)+b$
   $= aceX+acf+ad+b$
   $((aX+b)\star(cX+d))\star(eX+f) = (acX+ad+b)\star(eX+f) = aceX+acf+ad+b$
   $= aceX+acf+ad+b$

   Donc la loi est associative.

   Neutre $(aX+b)\star(cX+d) = aX+b \Leftrightarrow acX+ad+b = aX+b \Leftrightarrow c=1$ et $d=0$

   Le neutre semble être X. A droite c'est le cas par l'équivalence précédente.

   On vérifie à gauche: $(X)\star(cX+d) = cX+1d+0 = cX+d$

   Donc X est le neutre.

   Recherche du symétrique:

   $(aX+b)\star(cX+d) = X \Leftrightarrow ac=1$ et $ad+b=0 \Leftrightarrow c=\dfrac{1}{a}$ et $d=-\dfrac{b}{a}$

   On vérifie que $\left(\dfrac{1}{a}X-\dfrac{b}{a}\right)\star(aX+b) = \dfrac{1}{a}aX+\dfrac{1}{a}b-\dfrac{b}{a} = X$

   donc $\dfrac{1}{a}X-\dfrac{b}{a}$ est le symétrique de $aX+b$

   G est donc un groupe.

3. On a $(2X+1)\star(X+2) = 2X+5$ et $(X+2)\star(2X+1) = 2X+3$

   donc le groupe n'est pas commutatif.

4. Soit $x = aX+k(a-1)$ et $y = bX+k(b-1)$

   $x\star y^{-1} = (aX+k(a-1))\star\left(\dfrac{1}{b}X-\dfrac{k(b-1)}{b}\right) = \dfrac{a}{b}X-\dfrac{ak(b-1)}{b}+k(a-1)$
   $= \dfrac{a}{b}X+\dfrac{-ak(b-1)+kb(a-1)}{b} = \dfrac{a}{b}X+\dfrac{-akb+ak+kba-kb}{b} = \dfrac{a}{b}X+\dfrac{k(a-b)}{b}$
   $= \dfrac{a}{b}X+k\left(\dfrac{a}{b}-1\right) \in A_k$

   Donc A_k est un sous-groupe de H

Exercice 4 (*7 points*)

1. Déterminer, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ et en utilisant le pivot de Gauss, l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x & + & y & + & mz & = & 1 \\ 3x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & m \end{cases}$$

2. En déduire de la résolution précédente le rang de la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution

Notons $(\mathscr{S})$ le système.
On procède par pivot de gauss sur x, puis y.
Alors

$$(\mathscr{S}) \Longleftrightarrow \begin{cases} x & + & y & + & mz & = & 1 & \\ & & -2y & + & -z(1+3m) & = & -2 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ & & -3y & + & (2-m)z & = & m-1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & + & y & + & mz & = & 1 & \\ & & -2y & + & -z(1+3m) & = & -2 & \\ & & & & z(3(1+3m)+2(2-m)) & = & 6+2(m-1) & L_2 \leftarrow -3L_2 + 2L_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & + & y & + & mz & = & 1 & \\ & & -2y & + & -z(1+3m) & = & -2 & \\ & & & & z(3+9m+4-2m) & = & 2(m+2) & L_2 \leftarrow -3L_2 + 2L_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & + & y & + & mz & = & 1 & \\ & & -2y & + & -z(1+3m) & = & -2 & \\ & & & & 7z(m+1) & = & 2(m+2) & L_2 \leftarrow -3L_2 + 2L_3 \end{cases}$$

On peut alors discuter suivant les valeurs de m :

- Si $m+1 \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq -1$, le système n'admet pas de solutions car équivalent à $0 = 4$ (3ème équation)

- Sinon, on a $z = \dfrac{2(m+2)}{7(m+1)}$ puis $y = 1 - x - mz = \dfrac{5-3m^2}{7(m+1)}$

L'ensemble des solutions est alors $\left\{ \left(\dfrac{m+7}{2}, \dfrac{5-3m^2}{7(m+1)}, \dfrac{2(m+2)}{7(m+1)} \right) \right\}$.
Autre méthode:

On procède par pivot de gauss sur y, puis z.
Alors

$$(\mathscr{S}) \Longleftrightarrow \begin{cases} x & + & y & + & mz & = & 1 & \\ 2x & & & - & (m+1)z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3x & & & + & 2(m+1)z & = & m+2 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y + mz + x = 1 \\ -(m+1)z + 2x = 0 \\ 7x = m+2 \quad L_3 \leftarrow 2L_2 + L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y + mz + x = 1 \\ (m+1)z = \dfrac{2(m+2)}{7} \\ x = \dfrac{m+2}{7} \end{cases}$$

On peut alors discuter suivant les valeurs de m :

- Si $m+1 \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq -1$, le système n'admet pas de solutions car équivalent à $0 = \dfrac{1}{7}$ (2ème équation)
- Sinon, on a $x = \dfrac{m+2}{7}$ et $z = \dfrac{2(m+2)}{7(m+1)}$ puis $y = -\dfrac{2(m+2)(1+3m)}{14(m+1)} + 1 = \dfrac{-6m^2+10}{14(m+1)} = \dfrac{5-3m^2}{7(m+1)}$
  et $x = 1 - m\dfrac{2(m+2)}{7(m+1)} + \dfrac{3m^2-5}{7(m+1)} = \dfrac{m+7}{2}$

L'ensemble des solutions est alors $\underline{\left\{\left(\dfrac{m+7}{2}, \dfrac{5-3m^2}{7(m+1)}, \dfrac{2(m+2)}{7(m+1)}\right)\right\}}$.

Exercice 5 [3.5 points]

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on définit le système

$$\begin{cases} ax & + & (1-a)y & + & (1-a)z & = & a^2 \\ ax & + & (1+a)y & + & (1+a)z & = & a-a^2 \\ x & + & y & + & 2z & = & 1-a \end{cases}$$

1. Déterminer en fonction de a les solutions du système. 3 points

2. Pour quelles valeurs de a le sytème est-il de Cramer? 0.5 points

Solution

Notons (S) ce système, et appliquons la méthode du pivot de Gauss en choisissant la troisième ligne comme pivot:

$$(S) \iff \begin{cases} x & + & y & + & 2z & = & 1-a & L_3 \\ & & y & + & (1-a)z & = & 0 & L_2 - aL_3 \\ & & (1-2a)y & + & (1-3a)z & = & 2a^2-a & L_1 - aL_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & + & y & + & 2z & = & 1-a \\ & & y & + & (1-a)z & = & 0 \\ & & & & [(1-3a)-(1-2a)(1-a)]z & = & 2a^2-a & L_3-(1-2a)L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & + & y & + & 2z & = & 1-a \\ & & y & + & (1-a)z & = & 0 \\ & & & & -2a^2z & = & 2a^2-a \end{cases}$$

On distingue alors plusieurs cas.

Si $a \neq 0$, on obtient $\iff \begin{cases} x & = & \frac{3}{2}-\frac{1}{2a} \\ y & = & \frac{3}{2}-\frac{1}{2a}-a \\ z & = & -1+\frac{1}{2a} \end{cases}$ donc $S = \left\{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2a}; \frac{3}{2}-\frac{1}{2a}-a; -1+\frac{1}{2a}\right)\right\}$

Donc le système est de Cramer.

Si $a = 0$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$$

et donc l'ensemble des solutions est $\{(1+y, y, -y)\,;\, y \in \mathbb{R}\}$.

Remarque:

On peut également simplifier le système en effectuant la somme et la différence des deux premières lignes:

$$\begin{cases} ax & + & (1-a)y & + & (1-a)z & = & a^2 \\ ax & + & (1+a)y & + & (1+a)z & = & a-a^2 \\ x & + & y & + & 2z & = & 1-a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ax & + & 2y & + & 2z & = & a & L_1 \to L_1 + L_2 \\ x & + & y & + & 2z & = & 1-a & \\ & & 2ay & + & 2az & = & a-2a^2 & L_2 \to L_2 - L_1 \end{cases}$$

Donc le système est de Cramer.

Si $a = 0$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$$

et donc l'ensemble des solutions est $\left\{\left(1+y, y, -y\right); y \in \mathbb{R}\right\}$.

Sinon,

$$\begin{cases} ax & + & y & + & z & = & \frac{a}{2} & L_1 \to L_1/2 \\ & & y & + & z & = & \frac{1}{2}-a & L_2 \to L_2 - L_1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 1-a & \end{cases}$$

$$\begin{cases} & & y & + & z & = & \frac{1}{2}-a & L_1 \to L_3 \\ x & & & + & z & = & \frac{1}{2} & L_2 \to L_3 - L_2 \\ ax & & & & & = & \dfrac{3a-1}{2} & L_3 \to L_1 - L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = & \frac{3}{2}-\frac{1}{2a} \\ z & = & -1+\frac{1}{2a} \\ y & = & \frac{3}{2}-\frac{1}{2a}-a \end{cases}$$
