



Préing 1

Devoir Surveillé 1

Algèbre I

L'usage de tout appareil électronique est interdit

Date : **Jeudi 28 Octobre 2021**

Durée : **1h30**

Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 6 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1

Dans l'ensemble $E = [0; 8]$, on considère les trois sous-ensembles

$$A = [0; 3] \quad B = [1; 6[\quad \text{et} \quad C =]5; 7]$$

1. Déterminer les ensembles suivants : $B \setminus A$; $A^c \cup (B \cap C)$; $A \Delta B$.
2. Donner une partition de E contenant exactement 3 sous-ensembles notés A_1, A_2, A_3 .

Exercice 2

Soient P, Q et R des propositions. Montrer l'équivalence suivante :

$$[(P \text{ ou } Q) \implies R] \iff [(P \implies R) \text{ et } (Q \implies R)]$$

Exercice 3

1. Donner la négation de : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \implies 3 < x < 7$.
2. (a) Exprimer à l'aide de quantificateurs la propriété suivante :
« Deux fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , sont toutes deux non nulles et leur produit est nul. »
(b) Cette propriété est-elle vraie?

Exercice 4

Montrer que

$$[a \text{ est irrationnel}] \implies [\sqrt{a} \text{ est irrationnel}].$$

Exercice 5

1. Enoncer le principe de récurrence double.
2. On note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+1}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leq a_n \leq n^2.$$

Exercice 6

1. Montrer que $A \cup B = A \cap B \iff A = B$
2. Montrer que $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.