	Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ année Corection du Devoir Surveillé 1	
CY TECH	*Matière* : **Algèbre**	*Date* : **Jeudi 28 octobre 2021**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **1 h 30 min**
		Nombre de pages : **2**

⋄⋄⋄

Exercice 1. [3.5 points]

1. (0.5 point) $B \setminus A =]3;6[$
   (1 point) $A^c =]3;8]$, $B \cap C =]5;6[$, $A^c \cup B \cap C =]3;8]$
   (1 point) $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = [0;6[\setminus [1;3] = [0;1[\cup]3;6[$
2. $A_1 = [0;1[, A_2 = [1,3], A_3 =]3;8]$

Exercice 2. [3 points]

Les deux propositions ont la même table de vérité.

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

Exercice 3. [3 points]

1. (1 point) La négation est :
$$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \text{ et } 3 \geq x \text{ ou } 7 \leq x$$
2. (a) (1 points)
$$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0 \text{ et } \exists x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \times g(x) = 0$$
   .
   (b) (0.5 point) Il existe bien deux fonctions qui ont la propriété :
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$
   Il s'agit de deux fontions f et g non nulles et leur produit $f \times g$ est nul.

Exercice 4. [3 points]
Supposons que a est irrationnel et montrons que $\sqrt{a}$ est irrationnel.
On raisonne par contraposée.
On suppose qu'il existe p et q deux entiers (q non nul), tel que $\sqrt{a} = \frac{p}{q}$.
On a $\sqrt{a} = \frac{p}{q}$, on passe au carré, on obtient $a = \frac{p^2}{q^2}$, on a p^2 et q^2 deux eniers avec q^2 non nul. Donc a est rationnel, ce qui est absurde. D'ou le résulat.

Exercice 5. [4 points]

1. (1 point) Récurrence double On l'applique pour une propriété $P(n)$ au rang n qui dépend de $(n-1)$ et $(n-2)$, on procède à une récurrence double. Le principe est le Suivant :

   (a) On vérifie que la proprieté est vraie pour les deux premiers rangs.

   (b) Soit n entier naturel (fixé),
   On suppose que la propriété est vraie pour le rang n et $n+1$ et montre la propriété pour le rang $(n+2)$.

   (c) Conclusion pour tout entier naturel n, la propriét'é $P(n)$ est vraie.

2. $(1.5+1.5$ points) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $P(n)$: "$1 \leq a_n \leq n^2$" on va procéder par récurrence double.

   (a) Initialisation $a_1 = 1$ donc $1 \leqslant a_1 \leqslant 1^2$ donc $P(1)$ est vraie
   $a_2 = 2$ donc $1 \leqslant a_2 \leqslant 2^2$ donc $P(2)$ est vraie

   (b) Soit n entier plus grand ou égale à 1 , Supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies. Montrons que $P(n+2)$ est vraie. On a

   $$a_{n+1} \leqslant (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \qquad \frac{a_n}{n+1} \leqslant \frac{n^2}{n+1} \leqslant \frac{(n+1)^2}{n+1} = n+1$$

   Donc

   $$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+1} \leqslant n^2 + 2n + 1 + n + 1 \leqslant n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

   De plus

   $$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+1} \geqslant 1 + \frac{1}{n+1} \geqslant 1$$

   D'ou $P(n+2)$

   (c) Conclusion : pour tout n entier naturel, on a $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$

Exercice 6. [2.5 points]

1. (2 points)

   (a) Montrons ($\Longrightarrow$)
   Montrons que $A \subset B$.
   Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B = A \cap B$. Donc $x \in B$.
   Cela implique que $A \subset B$.
   La deuxiéme inclusion est obtenue en permutant A et B. Conclusion $A = B$.

   (b) Montrons ($\Longleftarrow$)
   Évident : si $A = B$, alors $A \cup B = A = A \cap B$.

2. (1.5) $A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B \setminus C)^c = A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.