CY TECH	**Cycle préparatoire 2$^{\text{ème}}$ année** **Devoir surveillé 1** *Didier Cransac, Abdessalam El Janati, Khaoula Guezguez, Ahmed Hajej, Zoghlami Naim*	
	Matière : **Séries**	*Date* : **Vendredi 12 novembre 2021**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **1 h 30 min**
		Nombre de pages : **3**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte trois exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

⋄ ⋄ ⋄

Exercice 1. [8 points]

A) Déterminer la nature de convergence des séries de terme général :

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{n}}; \qquad v_n = 2\ln(n^3+1) - \ln(n^2+1)$$

B) Déterminer la nature de convergence des séries de terme général :

$$a_n = (-1)^n \sin(\frac{1}{n}); \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^n - 1; \qquad c_n = \ln n \times b_n$$

Correction Exercice 1

A (1) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{2\ln(n)-\sqrt{n}\ln(3)} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\sqrt{n}\left(\frac{2\ln(n)}{\sqrt{n}}-\ln(3)\right)} = 0$ (par croissance comparée). D'où, par le lemme de Riemann ($\alpha = 2 > 1$), la série $\sum u_n$ est convergente.

(2) On a $v_n = \ln(n^3+1)^2 - \ln(n^2+1) = \ln\left(\dfrac{(n^3+1)^2}{n^2+1}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n^3+1)^2}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^4 = +\infty$. Donc, par continuité de ln, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ ($\neq 0$). D'où $\sum v_n$ diverge grossièrement.

B (1) On commence par remarquer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n} \in]0,1] \subset]0,\frac{\pi}{2}]$. Donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$ (pour $n \geq 1$). D'autre part, $(\sin(1/n))_n$ est une suite décroissante (comme composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante) qui converge vers 0 (par le théorème des gendarmes). D'où, par le critère des séries alternées, $\sum a_n$ est convergente.

(2) On commence par remarquer que $b_n \geq 0$ (pour tout $n \geq 1$). On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$, donc $n\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \sim n \times \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Cela implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right) = 0$. Donc $e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} - 1 \sim n\ln\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, d'où, par le théorème des équivalences pour les séries à termes positifs, $\sum b_n$ converge.

(3) On note que $c_n \geq 0$ (pour tout $n \geq 1$). D'après l'exemple 2., on a $c_n \sim \dfrac{\ln n}{n^2} = d_n$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2} d_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n^{1/2}} = 0$ (croissance comparée). D'où, par le lemme de Riemann ($3/2 > 1$), $\sum d_n$ est convergente, et par la suite $\sum c_n$ est convergente (par équivalence).

Exercice 2. [5.5 points]

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k, $\quad k^3 = k + 3k(k-1) + k(k-1)(k-2)$.

   (b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{k^3}{k!}$ est convergente et déterminer sa somme.

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ est convergente et déterminer sa somme.

Correction Exercice 2

1. (a) Il suffit de développer et simplifier $k + 3k(k-1) + k(k-1)(k-2)$ pour trouver k^3.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 3$. D'aprés (a), $\dfrac{k^3}{k!} = \dfrac{k}{k!} + \dfrac{3k(k-1)}{k!} + \dfrac{k(k-1)(k-2)}{k!}$.
   En simplifiant, on obtient
   $$\frac{k^3}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} + \frac{3}{(k-2)!} + \frac{1}{(k-3)!}.$$

   Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^3}{k!}$. On a
   $$\begin{aligned} S_n &= 5 + \sum_{k=3}^{n} \frac{k^3}{k!} \\ &= 5 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=3}^{n} \frac{3}{(k-2)!} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-3)!} \\ &= 5 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{3}{k!} + \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{3}{k!} + \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

   Or on sait que $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ converge vers e, donc $\lim_{n\to\infty} S_n = 5e$. D'où $\sum_{k\geq 0} \frac{k^3}{k!}$ conerge vers $5e$.

2. Soit
   $$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

   Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$. D'où $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge vers $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 3. [6.5 points]
Soit $a \in]0,1[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \\ u_0 = a \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1[$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Quelle est sa limite ?
3. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^2$ est convergente et déterminer sa somme.
4. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
5. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$? (on pourra utiliser la définition)

Correction Exercice 3

1. Par récurrence sur n. Soit $P(n) : u_n \in]0,1[$.
   Initialisation : $P(0)$ est vraie, car $u_0 = a \in]0,1[$.
   Héridité : Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
   Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c.à.d, $u_{n+1} \in]0,1[$. On a $u_{n+1} = u_n - u_n^2 \leq u_n$. Or, par hypothèse de récurrence, $u_n < 1$, donc $u_{n+1} < 1$. D'autre part, $u_{n+1} = u_n - u_n^2 = u_n(1-u_n)$. Or, par hypothèse de récurrence $u_n > 0$ et $1 - u_n > 0$, donc, par produit, $u_n > 0$. D'où on a établit que $u_{n+1} \in]0,1[$, c.à.d, que $P(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_n \in]0,1[$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par définition, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$. Donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante. Or, d'après la question 1., $(u_n)_n$ est minorée par 0, d'où elle est convergente. Notons l sa limite. Passant à la limite dans la définition ((la fonction carré étant continue), on obtien $l = l - l^2$. Cela implique que $l = 0$.
3. Par définition, on a $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$. Donc $S_n = \sum_{k=0}^n u_k^2 = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}$. En utilisant le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = a$. D'où la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge vers a.
4. On a $\sum\limits_{k=0}^{n} \ln\left(\dfrac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_{n+1}) - \ln(a)$. En utilisant le fait que la limite de u_n est 0 et la continuité de ln, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \ln\left(\dfrac{u_{k+1}}{u_k}\right) = -\infty$. D'où la s{erie $\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
5. En utilisant la définiton et que $u_n > 0$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - u_n > 0$. Cela implique que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(1 - u_n)$. Or $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, donc $\ln(1-u_n) \sim -u_n$, et par la suite, $u_n \sim -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Or $\sum -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente (d'après la question 4.), donc, par le théorème des équivalences pour les séries à termes positifs $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.